Scheda 5

Alessandro Amella & GPT

9 febbraio 2025

Esercizio 1

Il raggio R di un certo tipo di particella inquinante, espresso in micron, è una variabile aleatoria continua con densità

$$f_R(x) = \begin{cases} cxe^{-x^2}, & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Trovare il valore della costante c.

Perché $f_R(x)$ sia una densità di probabilità, l'integrale su tutto il supporto deve essere uguale a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_R(x)dx = 1$$

$$\int_0^{+\infty} cxe^{-x^2} dx = 1$$

Sia $u = x^2$, allora $du = 2xdx$, quindi $xdx = \frac{1}{2}du$. Quando $x = 0$, $u = 0$. Quando $x \to +\infty$, $u \to +\infty$.

$$\int_0^{+\infty} ce^{-u}\frac{1}{2}du = 1$$

$$\frac{c}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u}du = 1$$

$$\frac{c}{2}[-e^{-u}]_0^{+\infty} = 1$$

$$\frac{c}{2}[(-e^{-\infty}) - (-e^0)] = 1$$

$$\frac{c}{2}[0 - (-1)] = 1$$

$$\frac{c}{2} = 1 \implies c = 2$$

Quindi, il valore della costante è $c = 2$.

(b) Determinare la funzione di ripartizione di R.

La funzione di ripartizione $F_R(x) = \mathbb{P}(R \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_R(t)dt$.

Per $x \le 0$, $F_R(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

Per $x > 0$, $F_R(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 2te^{-t^2}dt = \int_{0}^{x} 2te^{-t^2}dt$. Usando la sostituzione $u = t^2$, $du = 2tdt$:

$$\int_0^{x^2} e^{-u}du = [-e^{-u}]_0^{x^2} = -e^{-x^2} - (-e^0) = 1 - e^{-x^2}$$

Quindi, la funzione di ripartizione è:

$$F_R(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2}, & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x \le 0 \end{cases}$$

(c) Calcolare la media di R. [Si usi che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$]

La media di R, $\mathbb{E}[R]$, è data da $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_R(x)dx$.

$$\mathbb{E}[R] = \int_0^{+\infty} x(2xe^{-x^2})dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$$

Usiamo l'integrazione per parti con $u = x$ e $dv = 2xe^{-x^2}dx$. Allora $du = dx$ e $v = \int 2xe^{-x^2}dx = -e^{-x^2}$.

$$\mathbb{E}[R] = [x(-e^{-x^2})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-e^{-x^2})dx = [-xe^{-x^2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Il primo termine è $\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x^2}) - (-0e^{-0^2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^{x^2}} - 0$. Usando la regola di L'Hôpital: $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2xe^{x^2}} = 0$. Quindi, $\mathbb{E}[R] = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(d) Calcolare la probabilità che una particella abbia un raggio superiore a 2 micron.

$\mathbb{P}(R > 2) = 1 - \mathbb{P}(R \le 2) = 1 - F_R(2)$. $F_R(2) = 1 - e^{-2^2} = 1 - e^{-4}$. $\mathbb{P}(R > 2) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4}$.

(e) Sia ora X la variabile aleatoria che vale 1 se $R < 2$ e 0 altrimenti.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se } R < 2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

X è una variabile aleatoria discreta perché può assumere solo due valori, 0 e 1. Il supporto di X è $\{0, 1\}$. La densità discreta è data dalle probabilità $\mathbb{P}(X = 0)$ e $\mathbb{P}(X = 1)$. $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(R < 2) = \mathbb{P}(R \leq 2) = F_R(2) = 1 - e^{-4}$. $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(R \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(R < 2) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4}$.

La densità discreta di X è:

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 1 - e^{-4}, & \text{se } k = 1 \\ e^{-4}, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 2

Sia X una v.a.c. con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ 1/4, & -1 < x < 0, \\ a(1 - x^3), & 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

(a) Valore del parametro a

Perché $f_X(x)$ sia una funzione di densità di probabilità valida, l'integrale della densità su tutto il supporto deve essere uguale a 1. Quindi, dobbiamo avere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Sostituendo l'espressione di $f_X(x)$, otteniamo:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{4} dx + \int_{0}^{1} a(1 - x^3) dx = 1$$

Calcoliamo gli integrali:

$$\left[\frac{1}{4}x\right]_{-1}^{0} + a\left[x - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{4}\cdot(-1)\right)+a\left((1-\frac{1^4}{4})-(0-\frac{0^4}{4})\right)=1$$

$$\frac{1}{4}+a\left(1-\frac{1}{4}\right)=1$$

$$\frac{1}{4}+a\frac{3}{4}=1$$

Moltiplicando per 4 otteniamo:

$$1+3a=4$$

$$3a=3$$

$$a=1$$

Quindi, il valore del parametro a è 1.

(b) Calcolo delle quantità richieste

Con $a=1$, la funzione di densità diventa:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & |x|\geq 1,\\ 1/4, & -1<x<0,\\ 1-x^3, & 0\leq x<1.\end{cases}$$

1. $\mathbb{P}(X\leq 1/2)$:

$$\mathbb{P}(X\leq 1/2)=\int_{-\infty}^{1/2}f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{4}dx+\int_{0}^{1/2}(1-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x\right]_{-1}^{0}+\left[x-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1/2}=\left(0-(-\frac{1}{4})\right)+\left((\frac{1}{2}-\frac{(1/2)^4}{4})-(0-0)\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{64}=\frac{16+32-1}{64}=\frac{47}{64}$$

2. $\mathbb{P}(-1/4\leq X\leq 1/4)$:

$$\mathbb{P}(-1/4\leq X\leq 1/4)=\int_{-1/4}^{1/4}f_X(x)dx=\int_{-1/4}^{0}\frac{1}{4}dx+\int_{0}^{1/4}(1-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x\right]_{-1/4}^{0}+\left[x-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1/4}=\left(0-(-\frac{1}{16})\right)+\left((\frac{1}{4}-\frac{(1/4)^4}{4})-(0-0)\right)$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{1024}=\frac{64+256-1}{1024}=\frac{319}{1024}$$

3. $\mathbb{P}(X = 0)$: Poiché X è una variabile aleatoria continua, la probabilità che X assuma un valore specifico è zero. Quindi, $\mathbb{P}(X = 0) = 0$.

4. $\mathbb{P}(X \leq 3)$: Poiché $f_X(x) = 0$ per $x \geq 1$, la funzione di ripartizione $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ per $x \geq 1$. Pertanto, $\mathbb{P}(X \leq 3) = 1$.

5. $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^{0} x \frac{1}{4} dx + \int_{0}^{1} x(1 - x^3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_{0}^{1} = \left(0 - \frac{1}{8}\right) + \left((\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) - (0 - 0)\right)$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{3}{10} = \frac{-5 + 12}{40} = \frac{7}{40}$$

6. $\mathrm{Var}(X)$: Prima calcoliamo $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^{0} x^2 \frac{1}{4} dx + \int_{0}^{1} x^2(1 - x^3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{12}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right]_{0}^{1} = \left(0 - (-\frac{1}{12})\right) + \left((\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - (0 - 0)\right)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1 + 2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Quindi, la varianza è:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{7}{40}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{49}{1600} = \frac{400 - 49}{1600} = \frac{351}{1600}$$

(c) Funzione di ripartizione di X

La funzione di ripartizione $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ è definita come:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt, & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcoliamo $F_X(x)$ per $-1 < x < 0$:

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{4} dt = \left[\frac{1}{4}t\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{4}(x + 1)$$

Calcoliamo $F_X(x)$ per $0 \leq x < 1$:

$$F_X(x) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{4} dt + \int_{0}^{x} (1 - t^3) dt = F_X(0) + \int_{0}^{x} (1 - t^3) dt$$

$$F_X(0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{4} dt = \left[\frac{1}{4} t \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{x} (1 - t^3) dt = \left[t - \frac{t^4}{4} \right]_{0}^{x} = x - \frac{x^4}{4}$$

Quindi, per $0 \leq x < 1$:

$$F_X(x) = \frac{1}{4} + x - \frac{x^4}{4}$$

Mettendo insieme i risultati:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{4}(x+1), & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4} + x - \frac{x^4}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

(a) La densità di X

La funzione di densità di probabilità $f_X(x)$ è la derivata della funzione di ripartizione $F_X(x)$ rispetto a x. Data la funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (1 - e^{-x})^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Per $x < 0$:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx}(0) = 0$$

Per $x \geq 0$:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-x})^2$$

Utilizzando la regola della catena:

$$f_X(x) = 2(1 - e^{-x}) \frac{d}{dx}(1 - e^{-x}) = 2(1 - e^{-x})(e^{-x}) = 2e^{-x}(1 - e^{-x}) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$$

Quindi, la densità di probabilità è:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2e^{-x}(1 - e^{-x}), & x \geq 0 \end{cases}$$

(b) $\mathbb{P}(X > 1)$

Utilizziamo la proprietà $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F_X(a)$. Per $a = 1$, abbiamo $x = 1 \geq 0$, quindi usiamo la seconda parte della funzione di ripartizione:

$$F_X(1) = (1 - e^{-1})^2$$

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - F_X(1) = 1 - (1 - e^{-1})^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2$$

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \left(1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}\right) = 1 - 1 + \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{2e - 1}{e^2}$$

(c) $\mathbb{P}(1 < X < 2)$

Per una variabile aleatoria continua, $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$. Qui, $a = 1$ e $b = 2$. Entrambi sono ≥ 0, quindi usiamo la seconda parte della funzione di ripartizione:

$$F_X(2) = (1 - e^{-2})^2$$
$$F_X(1) = (1 - e^{-1})^2$$
$$\mathbb{P}(1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(1) = (1 - e^{-2})^2 - (1 - e^{-1})^2$$
$$\mathbb{P}(1 < X < 2) = (1 - 2e^{-2} + e^{-4}) - (1 - 2e^{-1} + e^{-2})$$
$$\mathbb{P}(1 < X < 2) = 1 - 2e^{-2} + e^{-4} - 1 + 2e^{-1} - e^{-2}$$
$$\mathbb{P}(1 < X < 2) = 2e^{-1} - 3e^{-2} + e^{-4} = \frac{2}{e} - \frac{3}{e^2} + \frac{1}{e^4} = \frac{2e^3 - 3e^2 + 1}{e^4}$$

Esercizio 4

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - e^{1-x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Determinare la densità di X.

La funzione di densità di probabilità (PDF) $f_X(x)$ si ottiene derivando la funzione di ripartizione $F_X(x)$ rispetto a x.

Per $x < 1$, $F_X(x) = 0$, quindi $f_X(x) = \frac{d}{dx}(0) = 0$.

Per $x \geq 1$, $F_X(x) = 1 - e^{1-x}$, quindi $f_X(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{1-x}) = -e^{1-x} \cdot \frac{d}{dx}(1 - x) = -e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}$.

Quindi, la densità di X è:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ e^{1-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Calcolare media e varianza di X.

La media di X, $E[X]$, è data da:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{1}^{+\infty} x e^{1-x} dx$$

Utilizziamo l'integrazione per parti con $u = x$ e $dv = e^{1-x}dx$. Allora $du = dx$ e $v = -e^{1-x}$.

$$\begin{aligned} E[X] &= \left[-xe^{1-x}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -e^{1-x} dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[-xe^{1-x}\right]_1^b + \int_1^{+\infty} e^{1-x} dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left(-be^{1-b} - (-1e^{1-1})\right) + \left[-e^{1-x}\right]_1^{+\infty} \\ &= (0 + 1) + (0 - (-1)) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

La media $E[X] = 2$.

Per la varianza, calcoliamo prima $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{1}^{+\infty} x^2 e^{1-x} dx$$

Utilizziamo di nuovo l'integrazione per parti con $u = x^2$ e $dv = e^{1-x}dx$. Allora $du = 2xdx$ e $v = -e^{1-x}$.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \left[-x^2e^{1-x}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -e^{1-x} 2x dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[-x^2e^{1-x}\right]_1^b + 2\int_1^{+\infty} xe^{1-x} dx \\ &= (0 + 1) + 2E[X] = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \end{aligned}$$

La varianza di X, $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 5 - (2)^2 = 5 - 4 = 1$.
La varianza $Var(X) = 1$.

(c) Qual è la densità continua della variabile aleatoria $Y = e^X$?

Utilizziamo la formula per la trasformazione di variabili casuali. Sia $Y = g(X) = e^X$. La funzione inversa è $X = g^{-1}(Y) = \ln(Y)$. La derivata dell'inversa è $\frac{dX}{dY} = \frac{1}{Y}$. La densità di Y, $f_Y(y)$, è data da:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dX}{dY} \right| = f_X(\ln(y)) \left| \frac{1}{Y} \right| = \frac{f_X(\ln(y))}{y}$$

Poiché $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ e^{1-x}, & x \geq 1 \end{cases}$, allora $f_X(\ln(y)) = \begin{cases} 0, & \ln(y) < 1 \\ e^{1-\ln(y)}, & \ln(y) \geq 1 \end{cases}$. $\ln(y) < 1 \implies y < e^1 = e$ e $\ln(y) \geq 1 \implies y \geq e^1 = e$. Quindi, $f_X(\ln(y)) = \begin{cases} 0, & y < e \\ e^{1-\ln(y)}, & y \geq e \end{cases}$. E

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < e \\ \frac{e^{1-\ln(y)}}{y}, & y \geq e \end{cases}$$

Poiché $e^{1-\ln(y)} = e^1 \cdot e^{-\ln(y)} = e \cdot e^{\ln(y^{-1})} = e \cdot y^{-1} = \frac{e}{y}$.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < e \\ \frac{e/y}{y}, & y \geq e \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < e \\ \frac{e}{y^2}, & y \geq e \end{cases}$$

Esercizio 5

Per determinare i possibili valori di λ affinché la funzione $f_X(x)$ sia una funzione di densità di probabilità (pdf) valida, dobbiamo verificare due condizioni fondamentali:

1. **Non-negatività:** $f_X(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2. **Normalizzazione:** $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$.

Analizziamo la prima condizione, la non-negatività. Per $x \leq 0$, abbiamo $f_X(x) = 0$, che è non-negativa. Per $x > 0$, abbiamo $f_X(x) = \frac{2x}{\lambda} e^{-x^2/\lambda}$. Poiché $x > 0$ e $e^{-x^2/\lambda} > 0$ (la funzione esponenziale è sempre positiva), per garantire che $f_X(x) \geq 0$

per $x > 0$, dobbiamo avere $\frac{2}{\lambda} > 0$. Questo implica che $\lambda > 0$. Inoltre, λ non può essere zero poiché porterebbe a una divisione per zero.

Ora, verifichiamo la seconda condizione, la normalizzazione. Dobbiamo calcolare l'integrale di $f_X(x)$ su tutto il suo dominio e verificarne l'uguaglianza a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

Poiché $f_X(x) = 0$ per $x \leq 0$, il primo integrale è zero. Quindi, dobbiamo valutare il secondo integrale e imporlo uguale a 1:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\lambda} e^{-x^2/\lambda}\,dx = 1$$

Utilizziamo il metodo di sostituzione. Sia $u = \frac{x^2}{\lambda}$. Allora, $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{\lambda}$, quindi $du = \frac{2x}{\lambda}\,dx$. Quando $x = 0$, $u = \frac{0^2}{\lambda} = 0$. Quando $x \to +\infty$, $u = \frac{(+\infty)^2}{\lambda} \to +\infty$ (poiché abbiamo già stabilito che $\lambda > 0$). Sostituendo u e du nell'integrale:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-u}\,du$$

Questo è un integrale standard. L'antiderivata di e^{-u} è $-e^{-u}$. Valutando l'integrale definito:

$$\left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}) - (-e^{0}) = 0 - (-1) = 1$$

L'integrale risulta essere uguale a 1 per qualsiasi $\lambda > 0$.

Pertanto, le condizioni per avere una funzione di densità di probabilità sono soddisfatte se e solo se $\lambda > 0$.

Esercizio 6

(a) Determinare λ

Perché $f_X(x)$ sia una funzione di densità di probabilità valida, l'integrale su tutto il suo supporto deve essere uguale a 1. Il supporto è dove $f_X(x) > 0$, che è $x > \lambda$. Quindi, dobbiamo avere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$
$$\int_{\lambda}^{\infty} \lambda e^{-(x-\lambda)}dx = 1$$

Effettuando la sostituzione $u = x - \lambda$, quindi $du = dx$. Quando $x = \lambda$, $u = 0$. Quando $x \to \infty$, $u \to \infty$. L'integrale diventa:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-u} du = 1$$

$$\lambda \int_0^\infty e^{-u} du = 1$$

$$\lambda[-e^{-u}]_0^\infty = 1$$

$$\lambda[-(0-1)] = 1$$

$$\lambda = 1$$

(b) Calcolare la funzione di ripartizione di X

La funzione di ripartizione (CDF) è data da $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$.

Per $x \leq \lambda = 1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$$

Per $x > \lambda = 1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0 dt + \int_{1}^{x} 1 \cdot e^{-(t-1)} dt = \int_{1}^{x} e^{-(t-1)} dt$$

Effettuando la sostituzione $u = t - 1$, $du = dt$. Quando $t = 1$, $u = 0$. Quando $t = x$, $u = x - 1$.

$$F_X(x) = \int_0^{x-1} e^{-u} du = [-e^{-u}]_0^{x-1} = -e^{-(x-1)} - (-e^0) = 1 - e^{-(x-1)}$$

Quindi, la funzione di ripartizione è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1 - e^{-(x-1)}, & x > 1 \end{cases}$$

(c) Si calcoli $\mathbb{P}(X > 3)$ e $\mathbb{P}(X^3 > 27)$

Per $\mathbb{P}(X > 3)$:

$$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - F_X(3)$$

Poiché $3 > 1$, usiamo la seconda parte della CDF:

$$F_X(3) = 1 - e^{-(3-1)} = 1 - e^{-2}$$

$$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2}$$

Per $\mathbb{P}(X^3 > 27)$:

$$X^3 > 27 \implies X > \sqrt[3]{27} \implies X > 3$$

Quindi, $\mathbb{P}(X^3 > 27) = \mathbb{P}(X > 3) = e^{-2}$.

(d) Si calcoli la media di $3X^2 - 1$

Dobbiamo calcolare $E[3X^2 - 1] = 3E[X^2] - 1$. Prima, calcoliamo $E[X^2]$.

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{1}^{\infty} x^2 e^{-(x-1)}dx$$

Effettuando la sostituzione $u = x - 1$, $x = u + 1$, $dx = du$. Quando $x = 1$, $u = 0$. Quando $x \to \infty$, $u \to \infty$.

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} (u+1)^2 e^{-u}du = \int_0^{\infty} (u^2 + 2u + 1)e^{-u}du$$

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} u^2 e^{-u}du + 2\int_0^{\infty} ue^{-u}du + \int_0^{\infty} e^{-u}du$$

Sappiamo che $\int_0^{\infty} u^n e^{-u}du = \Gamma(n+1) = n!$ per interi non negativi n.

$$\int_0^{\infty} u^2 e^{-u}du = 2! = 2$$

$$\int_0^{\infty} ue^{-u}du = 1! = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-u}du = 0! = 1$$

$$E[X^2] = 2 + 2(1) + 1 = 5$$

Ora, calcoliamo $E[3X^2 - 1]$:

$$E[3X^2 - 1] = 3E[X^2] - 1 = 3(5) - 1 = 15 - 1 = 14$$

Esercizio 8

(a) Probabilità che la lampadina duri tutto il mese di marzo

Per calcolare la probabilità che la lampadina acquistata a inizio marzo non debba essere cambiata per tutto il mese, dobbiamo prima determinare il numero di ore in un mese di marzo. Marzo ha 31 giorni, e ogni giorno ha 24 ore. Quindi, il numero di ore in marzo è:

$$31 \times 24 = 744 \text{ ore}$$

Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il tempo di vita della lampadina. Sappiamo che $X \sim \text{Exp}(0.001)$. Vogliamo calcolare la probabilità che la lampadina duri più di 744 ore, ovvero $P(X > 744)$. Per una variabile aleatoria esponenziale con parametro λ, la funzione di sopravvivenza è data da $P(X > x) = e^{-\lambda x}$. Nel nostro caso, $\lambda = 0.001$ e $x = 744$. Quindi:

$$P(X > 744) = e^{-0.001 \times 744} = e^{-0.744} \approx 0.4753$$

La probabilità che la lampadina non debba essere cambiata per tutto il mese di marzo è circa 0.4753.

(b) Densità di probabilità di Y = 5X

Sia $Y = 5X$. Vogliamo trovare la densità di probabilità di Y, $f_Y(y)$. Utilizziamo il metodo della trasformazione di variabili. La trasformazione è $y = g(x) = 5x$, quindi $x = g^{-1}(y) = \frac{y}{5}$. La derivata di $g^{-1}(y)$ rispetto a y è $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{5}\right) = \frac{1}{5}$. La densità di probabilità di X è data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.001e^{-0.001x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Utilizzando la formula per la trasformazione di variabili, $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$:

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y}{5}\right)\left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}f_X\left(\frac{y}{5}\right)$$

Sostituendo l'espressione per $f_X(x)$: Per $y \geq 0$, $\frac{y}{5} \geq 0$, quindi $f_X\left(\frac{y}{5}\right) = 0.001e^{-0.001\frac{y}{5}} = 0.001e^{-0.0002y}$. Per $y < 0$, $\frac{y}{5} < 0$, quindi $f_X\left(\frac{y}{5}\right) = 0$. Pertanto, la densità di probabilità di Y è:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} \times 0.001e^{-0.0002y} = 0.0002e^{-0.0002y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

(c) Densità di probabilità di Z = e(̂X/2500)

Sia $Z = e^{X/2500}$. Vogliamo trovare la densità di probabilità di Z, $f_Z(z)$. La trasformazione è $z = g(x) = e^{X/2500}$. Per trovare la funzione inversa, risolviamo per x in termini di z:

$$z = e^{X/2500} \implies \ln(z) = \frac{X}{2500} \implies X = 2500\ln(z)$$

Quindi, $g^{-1}(z) = 2500\ln(z)$. La derivata di $g^{-1}(z)$ rispetto a z è $\frac{d}{dz}g^{-1}(z) = \frac{d}{dz}(2500\ln(z)) = \frac{2500}{z}$. Utilizzando la formula per la trasformazione di variabili, $f_Z(z) = f_X(g^{-1}(z))\left|\frac{d}{dz}g^{-1}(z)\right|$:

$$f_Z(z) = f_X(2500\ln(z))\left|\frac{2500}{z}\right| = \frac{2500}{z}f_X(2500\ln(z))$$

La funzione $f_X(x)$ è non nulla solo per $x \geq 0$. Quindi, dobbiamo avere $2500\ln(z) \geq 0$, il che implica $\ln(z) \geq 0$, ovvero $z \geq e^0 = 1$. Per $z \geq 1$, $f_X(2500\ln(z)) = 0.001e^{-0.001(2500\ln(z))} = 0.001e^{-2.5\ln(z)} = 0.001e^{\ln(z^{-2.5})} = 0.001z^{-2.5}$. Per $z < 1$, $f_X(2500\ln(z)) = 0$. Pertanto, la densità di probabilità di Z è:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2500}{z} \times 0.001z^{-2.5} = \frac{2.5}{z}z^{-2.5} = 2.5z^{-3.5} & z \geq 1 \\ 0 & z < 1 \end{cases}$$

Esercizio 9

(a)

Sappiamo che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con media $\mu = 4$ cm e varianza $\sigma^2 = 0.09$ cm^2. Quindi, la deviazione standard è $\sigma = \sqrt{0.09} = 0.3$ cm. Un diametro è accettabile se è compreso tra 3.95 cm e 4.05 cm. Dobbiamo calcolare la probabilità $P(3.95 \leq X \leq 4.05)$. Standardizziamo i valori usando la variabile standardizzata $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Per $X = 3.95$: $Z_1 = \frac{3.95-4}{0.3} = \frac{-0.05}{0.3} = -\frac{1}{6}$. Per $X = 4.05$: $Z_2 = \frac{4.05-4}{0.3} = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6}$.

Quindi, $P(3.95 \leq X \leq 4.05) = P\left(-\frac{1}{6} \leq Z \leq \frac{1}{6}\right) = \Phi\left(\frac{1}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{6}\right)$.

(b)

Dobbiamo calcolare la probabilità che il diametro sia inferiore a 4 cm, ovvero $P(X < 4)$. Standardizziamo $X = 4$: $Z = \frac{4-4}{0.3} = \frac{0}{0.3} = 0$. Quindi, $P(X < 4) = P(Z < 0) = \Phi(0) = 0.5$.

(c)

Ora non conosciamo μ e σ. Sappiamo che il 5% delle sbarre ha diametro inferiore a 3.95 cm, quindi $P(X < 3.95) = 0.05$. E il 12% delle sbarre ha diametro superiore a 4.05 cm, quindi $P(X > 4.05) = 0.12$, che equivale a $P(X \leq 4.05) = 1 - 0.12 = 0.88$.

Standardizzando queste probabilità: $P(X < 3.95) = 0.05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{3.95-\mu}{\sigma}\right) = 0.05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{3.95-\mu}{\sigma}\right) = 0.05$. $P(X \leq 4.05) = 0.88 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{4.05-\mu}{\sigma}\right) = 0.88 \Rightarrow \Phi\left(\frac{4.05-\mu}{\sigma}\right) = 0.88$.

Usando i valori forniti per la funzione inversa Φ^{-1}: $\Phi^{-1}(0.05) \approx -1.645 \Rightarrow \frac{3.95-\mu}{\sigma} = -1.645$. $\Phi^{-1}(0.88) \approx 1.175 \Rightarrow \frac{4.05-\mu}{\sigma} = 1.175$.

Abbiamo un sistema di due equazioni lineari:

$$
\begin{aligned}
3.95 - \mu &= -1.645\sigma \\
4.05 - \mu &= 1.175\sigma
\end{aligned}
$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda: $(4.05 - \mu) - (3.95 - \mu) = 1.175\sigma - (-1.645\sigma)$ $0.10 = 2.82\sigma$ $\sigma = \frac{0.10}{2.82} \approx 0.03546 \approx 0.0355$ cm.

Sostituendo σ nella prima equazione: $3.95 - \mu = -1.645 \times 0.03546 \approx -0.05832$ $\mu = 3.95 + 0.05832 \approx 4.00832 \approx 4.008$ cm.