Scheda 4

Alessandro Amella & GPT

9 febbraio 2025

Esercizio 3

(a) Il supporto di X è l'insieme dei valori che X può assumere con probabilità non nulla, quindi il supporto di X è $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. La funzione di ripartizione di X è definita come $F_X(x) = P(X \leq x)$. Per una variabile aleatoria discreta, la funzione di ripartizione è una funzione a gradini:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 0.02 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0.05 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0.14 & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 0.39 & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ 0.79 & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ 0.95 & \text{se } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{se } x \geq 7 \end{cases}$$

(b) La probabilità che X sia compresa tra 3 e 6, estremi esclusi, è

$$P(3 < X < 6) = P(X \in \{4, 5\}) = P(X = 4) + P(X = 5) = p_X(4) + p_X(5) = 0.25 + 0.40 = 0.65.$$

(c) Il valore atteso di X è

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = 1 \cdot 0.02 + 2 \cdot 0.03 + 3 \cdot 0.09 + 4 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.40 + 6 \cdot 0.16 + 7 \cdot 0.05 = 4.66.$$

Il valore atteso di X^2 è

$$E[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 p_X(x) = 1^2 \cdot 0.02 + 2^2 \cdot 0.03 + 3^2 \cdot 0.09 + 4^2 \cdot 0.25 + 5^2 \cdot 0.40 + 6^2 \cdot 0.16 + 7^2 \cdot 0.05 = 23.16.$$

La varianza di X è

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 23.16 - (4.66)^2 = 23.16 - 21.7156 = 1.4444.$$

La deviazione standard di X è

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1.4444} \approx 1.20.$$

Risposta:
(a) Supporto: $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 0.02 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0.05 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0.14 & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 0.39 & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ 0.79 & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ 0.95 & \text{se } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{se } x \geq 7 \end{cases}$$

(b) $P(3 < X < 6) = 0.65$.
(c) Valore atteso: $E[X] = 4.66$. Deviazione standard: $SD(X) \approx 1.20$.

Esercizio 4

Si consideri una variabile aleatoria discreta (v.a.d.) X con funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{6}, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Determinare supporto e densità discreta p_X di X.

Il supporto di X, indicato con S_X, è l'insieme dei valori che X può assumere con probabilità non nulla. Questi corrispondono ai punti di discontinuità della funzione di ripartizione $F_X(x)$. Osservando $F_X(x)$, i punti di discontinuità sono $x = 0, 1, 3$. Pertanto, il supporto di X è:

$$S_X = \{0, 1, 3\}.$$

La densità discreta $p_X(x)$ (o Funzione di Massa di Probabilità - PMF) è data dai salti della funzione di ripartizione nei punti del supporto.

- Per $x = 0$: $p_X(0) = P(X = 0) = F_X(0) - F_X(0^-) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.
- Per $x = 1$: $p_X(1) = P(X = 1) = F_X(1) - F_X(1^-) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- Per $x = 3$: $p_X(3) = P(X = 3) = F_X(3) - F_X(3^-) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.
- Per $x \notin S_X$: $p_X(x) = 0$.

Quindi, la densità discreta p_X di X è:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{6}, & x = 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(b) Calcolare il valore atteso di X.

Il valore atteso di X, $E[X]$, è calcolato come:

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x \cdot p_X(x) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) + 3 \cdot p_X(3)$$

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Pertanto, il valore atteso di X è $E[X] = 1$.

(c) Si consideri la variabile aleatoria $Y = \sqrt{X}$. Determinare supporto e densità discreta p_Y di Y.

Se $Y = \sqrt{X}$, il supporto di Y, S_Y, è ottenuto applicando la trasformazione $\sqrt{\cdot}$ ai valori nel supporto di X:

$$S_Y = \{\sqrt{x} : x \in S_X\} = \{\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{3}\} = \{0, 1, \sqrt{3}\}.$$

La densità discreta $p_Y(y)$ è determinata dalle probabilità corrispondenti di X. Poiché la trasformazione è biunivoca sul supporto considerato (per valori non negativi), abbiamo:

- Per $y = 0$: $p_Y(0) = P(Y = 0) = P(\sqrt{X} = 0) = P(X = 0^2) = P(X = 0) = p_X(0) = \frac{1}{3}$.

- Per $y = 1$: $p_Y(1) = P(Y = 1) = P(\sqrt{X} = 1) = P(X = 1^2) = P(X = 1) = p_X(1) = \frac{1}{2}$.
- Per $y = \sqrt{3}$: $p_Y(\sqrt{3}) = P(Y = \sqrt{3}) = P(\sqrt{X} = \sqrt{3}) = P(X = (\sqrt{3})^2) = P(X = 3) = p_X(3) = \frac{1}{6}$.
- Per $y \notin S_Y$: $p_Y(y) = 0$.

Quindi, la densità discreta p_Y di Y è:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & y = 0 \\ \frac{1}{2}, & y = 1 \\ \frac{1}{6}, & y = \sqrt{3} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(d) Calcolare il valore atteso di Y.

Il valore atteso di Y, $E[Y]$, è calcolato come:

$$E[Y] = \sum_{y \in S_Y} y \cdot p_Y(y) = 0 \cdot p_Y(0) + 1 \cdot p_Y(1) + \sqrt{3} \cdot p_Y(\sqrt{3})$$

$$E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}.$$

Pertanto, il valore atteso di Y è $E[Y] = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

Esercizio 5

(a) Qual è la legge di X?

Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero di chiavi provate per aprire la serratura. I valori possibili per X sono $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Calcoliamo le probabilità per ciascun valore:

- $P(X = 1)$: La chiave corretta è provata al primo tentativo. La probabilità di scegliere la chiave corretta tra 5 al primo tentativo è $\frac{1}{5}$.
- $P(X = 2)$: La chiave corretta è provata al secondo tentativo. Ciò significa che la prima chiave provata era sbagliata e la seconda chiave provata è quella giusta. La probabilità di scegliere una chiave sbagliata al primo tentativo è $\frac{4}{5}$. Date le 4 chiavi rimanenti, la probabilità di scegliere quella giusta è $\frac{1}{4}$. Quindi $P(X = 2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$.

- $P(X=3)$: Le prime due chiavi provate erano sbagliate e la terza è quella giusta. $P(X=3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.
- $P(X=4)$: Le prime tre chiavi provate erano sbagliate e la quarta è quella giusta. $P(X=4) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$.
- $P(X=5)$: Le prime quattro chiavi provate erano sbagliate e la quinta (l'ultima rimasta) è quella giusta. $P(X=5) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{5}$.

La legge di X è data da $P(X=k) = \frac{1}{5}$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$. X segue una distribuzione uniforme discreta su $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) Qual è il numero atteso di tentativi da fare?

Il numero atteso di tentativi è il valore atteso di X:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{5} k \cdot P(X=k) = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Il numero atteso di tentativi è 3.

(c) Quanto vale la probabilità di controllare almeno 4 chiavi?

La probabilità di controllare almeno 4 chiavi è $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

(d) Sapendo che al primo tentativo non ho trovato la chiave giusta, con quale probabilità non la trovo neanche al secondo?

Vogliamo calcolare la probabilità di non trovare la chiave giusta al secondo tentativo, sapendo che non è stata trovata al primo tentativo. Questo è $P(X > 2 \mid X > 1)$. Utilizzando la definizione di probabilità condizionata:

$$P(X > 2 \mid X > 1) = \frac{P(X > 2 \cap X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)}.$$

Calcoliamo $P(X > 1)$ e $P(X > 2)$:

$$P(X > 1) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$P(X > 2) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Quindi,

$$P(X > 2 \mid X > 1) = \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Alternativamente, se al primo tentativo non si è trovata la chiave giusta, rimangono 4 chiavi di cui 3 sbagliate e 1 giusta. La probabilità di non trovare la chiave giusta al secondo tentativo è la probabilità di scegliere una delle 3 chiavi sbagliate tra le 4 rimanenti, che è $\frac{3}{4}$.

Esercizio 6

(a) Calcolare la probabilità che ci siano almeno due frane in un dato mese.

Sia X il numero di frane in un mese, che segue una legge di Poisson di parametro $\lambda = 2.3$. Vogliamo calcolare la probabilità $P(X \geq 2)$. È più semplice calcolare la probabilità complementare $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$ e sottrarla da 1. La funzione di massa di probabilità di una variabile di Poisson è data da:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Per $k = 0$:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2.3}2.3^0}{0!} = e^{-2.3}$$

Per $k = 1$:

$$P(X = 1) = \frac{e^{-2.3}2.3^1}{1!} = 2.3e^{-2.3}$$

Quindi, $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-2.3} + 2.3e^{-2.3} = (1 + 2.3)e^{-2.3} = 3.3e^{-2.3}$. Usando una calcolatrice, $e^{-2.3} \approx 0.1002588$.

$$P(X < 2) \approx 3.3 \times 0.1002588 \approx 0.330854$$

Pertanto, $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \approx 1 - 0.330854 \approx 0.669146$.

Risposta (a): La probabilità che ci siano almeno due frane in un dato mese è approssimativamente 0.669.

(b) Quanto deve valere il parametro λ affinché la probabilità che in un mese non ci siano frane sia superiore a 1/2?

Vogliamo trovare il valore di λ tale che $P(X = 0) > \frac{1}{2}$.

$$P(X = 0) = e^{-\lambda}$$

Quindi, dobbiamo risolvere la disequazione:

$$e^{-\lambda} > \frac{1}{2}$$

Prendendo il logaritmo naturale di entrambi i lati:

$$\ln(e^{-\lambda}) > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$-\lambda > \ln(1) - \ln(2)$$
$$-\lambda > -\ln(2)$$
$$\lambda < \ln(2)$$

Usando una calcolatrice, $\ln(2) \approx 0.693147$.

Risposta (b): Il parametro λ deve essere minore di $\ln(2) \approx 0.693$ affinché la probabilità che in un mese non ci siano frane sia superiore a $1/2$.

(c) Sapendo che c'è stata almeno una frana, qual è la probabilità che ci siano state esattamente due frane?

Dobbiamo calcolare la probabilità condizionata $P(X = 2 \mid X \geq 1)$. Usando la formula per la probabilità condizionata:

$$P(X = 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X = 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)}$$

Se $X = 2$, allora $X \geq 1$ è sempre vero. Quindi, $(X = 2 \cap X \geq 1)$ è equivalente a $X = 2$.

$$P(X = 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X = 2)}{P(X \geq 1)}$$

Calcoliamo $P(X = 2)$ e $P(X \geq 1)$ con $\lambda = 2.3$.

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2.3}2.3^2}{2!} = \frac{e^{-2.3} \times 5.29}{2} = 2.645e^{-2.3}$$
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-2.3}$$

Usando $e^{-2.3} \approx 0.1002588$:

$$P(X = 2) \approx 2.645 \times 0.1002588 \approx 0.265176$$
$$P(X \geq 1) = 1 - e^{-2.3} \approx 1 - 0.1002588 \approx 0.899741$$
$$P(X = 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X = 2)}{P(X \geq 1)} \approx \frac{0.265176}{0.899741} \approx 0.294724$$

Risposta (c): Sapendo che c'è stata almeno una frana, la probabilità che ci siano state esattamente due frane è approssimativamente 0.295.

Esercizio 7

Variabile aleatoria Y = min(3, X)

Poiché X assume valori in $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$, la variabile aleatoria $Y = \min(3, X)$ assume valori nell'insieme finito $\{0, 1, 2, 3\}$. Pertanto, Y è una variabile aleatoria discreta. Il supporto di Y è:

$$\text{Support}(Y) = \{0, 1, 2, 3\}$$

La densità di probabilità di Y è data da:

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P(\min(3, X) = 0) = P(X = 0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = e^{-3} \\
P(Y = 1) &= P(\min(3, X) = 1) = P(X = 1) = \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 3e^{-3} \\
P(Y = 2) &= P(\min(3, X) = 2) = P(X = 2) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = \frac{9}{2}e^{-3} \\
P(Y = 3) &= P(\min(3, X) = 3) = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) \\
&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\
&= 1 - \left[e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9}{2}e^{-3}\right] \\
&= 1 - \left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right)e^{-3} = 1 - \frac{17}{2}e^{-3}
\end{aligned}$$

Variabile aleatoria W = $\mathbf{e}^{X/3}$

Poiché X assume valori in $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$, la variabile aleatoria $W = e^{X/3}$ assume valori nell'insieme $\{e^{k/3} : k = 0, 1, 2, \dots\} = \{1, e^{1/3}, e^{2/3}, e, e^{4/3}, \dots\}$. Questo insieme è numerabile, quindi W è una variabile aleatoria discreta. Il supporto di W è:

$$\text{Support}(W) = \{e^{k/3} : k = 0, 1, 2, \dots\}$$

La densità di probabilità di W è data da: Per ogni $k = 0, 1, 2, \dots,$

$$P(W = e^{k/3}) = P(e^{X/3} = e^{k/3}) = P(X/3 = k/3) = P(X = k) = \frac{e^{-3}3^k}{k!}$$

Risposte:

Y è una variabile aleatoria discreta con:

$$\text{Support}(Y) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(Y = 0) = e^{-3}, \quad P(Y = 1) = 3e^{-3}, \quad P(Y = 2) = \frac{9}{2}e^{-3}, \quad P(Y = 3) = 1 - \frac{17}{2}e^{-3}$$

W è una variabile aleatoria discreta con:

$$\text{Support}(W) = \{e^{k/3} : k = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(W = e^{k/3}) = \frac{e^{-3}3^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$