Scheda 1

Alessandro Amella & GPT

10 febbraio 2025

Formule Fondamentali del Calcolo Combinatorio e Quando Utilizzarle

L'aspetto cruciale nel calcolo combinatorio è capire se l'**ordine** degli elementi è importante e se gli elementi possono essere **ripetuti**.

1. Permutazioni Semplici (Ordine Importa, Senza Ripetizione)

Formula:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dove:

- n è il numero totale di oggetti disponibili.
- k è il numero di oggetti che scegliamo e ordiniamo.
- ! indica il fattoriale (es: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$).

Spiegazione: Le permutazioni semplici calcolano in quanti modi diversi puoi ordinare k oggetti *distinti* presi da un insieme di n oggetti *distinti*, dove l'ordine in cui li scegli è importante e non puoi ripetere gli oggetti.

Quando usarla:

- **Parole chiave/Condizioni:** "Ordinare", "Disporre", "Classificare", "Prime posizioni", "Diverso ordine conta", "Senza ripetizione", "Oggetti distinti".
- **Esempi tipici:**

- Quanti modi ci sono per classificare i primi 3 in una gara con 10 partecipanti? (Ordine di arrivo conta)
- Quanti anagrammi (parole con lettere riordinate) puoi formare con le lettere della parola "CIAO" (senza ripetere lettere e l'ordine delle lettere conta per formare parole diverse).
- Quanti numeri di 3 cifre *diverse* puoi formare con le cifre da 1 a 9? (Ordine delle cifre conta e non si possono ripetere le cifre).

2. Combinazioni Semplici (Ordine NON Importa, Senza Ripetizione)

Formula:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dove:

- n è il numero totale di oggetti disponibili.
- k è il numero di oggetti che scegliamo (senza considerare l'ordine).

Spiegazione: Le combinazioni semplici calcolano in quanti modi diversi puoi scegliere *gruppi* di k oggetti *distinti* da un insieme di n oggetti *distinti*, dove l'ordine in cui li scegli NON è importante e non puoi ripetere gli oggetti.

Quando usarla:

- **Parole chiave/Condizioni:** "Scegliere gruppi", "Selezionare", "Formare comitati", "Ordine non conta", "Senza ripetizione", "Oggetti distinti", "Sottogruppi".
- **Esempi tipici:**
  - Quante squadre di 5 giocatori puoi formare da 15 giocatori? (L'ordine in cui scegli i giocatori nella squadra non conta, conta solo il gruppo di 5).
  - Quante mani di 5 carte puoi ricevere da un mazzo di 52 carte? (L'ordine delle carte nella mano non conta, conta solo il set di 5 carte).
  - Quanti modi ci sono per scegliere 3 gusti di gelato diversi tra 10 gusti disponibili? (L'ordine in cui scegli i gusti non conta, conta solo la combinazione dei 3 gusti).

3. Permutazioni con Ripetizione (Ordine Importa, Con Ripetizione)

Formula (Caso semplice con n oggetti totali e k posizioni):

$$n^k$$

Dove:

- n è il numero di scelte possibili per ogni posizione.
- k è il numero di posizioni da riempire.

Formula (Caso con ripetizioni specifiche di oggetti): Se hai n oggetti totali, di cui n_1 sono di un tipo, n_2 di un altro tipo, ..., n_r di un ultimo tipo (dove $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$), il numero di permutazioni distinte è:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

Spiegazione: Le permutazioni con ripetizione considerano quante sequenze ordinate puoi formare quando puoi ripetere gli elementi. Ci sono due casi comuni:

- **Caso semplice:** Puoi scegliere tra n opzioni per ogni posizione k. Pensa a combinazioni di cifre o lettere dove puoi ripetere le scelte.
- **Caso con ripetizioni specifiche:** Hai un insieme di oggetti non tutti distinti (es: lettere della parola "BANANA"). Questa formula conta quante permutazioni *distinte* puoi formare.

Quando usarla (Caso semplice):

- **Parole chiave/Condizioni:** "Combinazioni con ripetizione", "Codici", "Password", "Sequenze", "Ordine conta", "Ripetizione permessa", "Cifre/lettere possono ripetersi".
- **Esempi tipici:**
  - Quante password di 4 caratteri puoi creare usando lettere e numeri (es: 36 scelte per carattere) se puoi ripetere i caratteri?
  - Quante targhe automobilistiche di 7 caratteri puoi fare se puoi usare 26 lettere e 10 cifre e puoi ripetere i caratteri?
  - Quante combinazioni di 6 cifre ci sono per una serratura (come nell'Esercizio 1)?

Quando usarla (Caso con ripetizioni specifiche):

- **Parole chiave/Condizioni:** "Anagrammi con lettere ripetute", "Disporre oggetti non tutti diversi", "Permutazioni distinte", "Lettere ripetute in una parola".
- **Esempi tipici:**
  - Quanti anagrammi diversi puoi formare con la parola "BANANA"? (Ci sono 3 'A', 2 'N', 1 'B').
  - In quanti modi puoi disporre 5 palline, se 2 sono rosse e 3 sono blu?

4. Combinazioni con Ripetizione (Ordine NON Importa, Con Ripetizione)

Formula:

$$C_{rip}(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Dove:

- n è il numero di *tipi* di oggetti tra cui scegliere.
- k è il numero di oggetti che scegliamo (con ripetizione).

Spiegazione: Le combinazioni con ripetizione calcolano in quanti modi puoi scegliere k oggetti da n *tipi* di oggetti, permettendo di ripetere le scelte. L'ordine di scelta non è importante. Immagina di scegliere gusti di gelato, dove puoi prendere più porzioni dello stesso gusto.

Quando usarla:

- **Parole chiave/Condizioni:** "Scegliere con ripetizione", "Combinazioni ripetute", "Distribuire oggetti identici in contenitori diversi", "Ordine non conta", "Ripetizioni permesse", "Tipi di oggetti".
- **Esempi tipici:**
  - Quanti modi ci sono per scegliere 3 gelati da 5 gusti disponibili, se puoi prendere più porzioni dello stesso gusto? (Tipi di gusti = 5, numero di gelati da scegliere = 3).
  - Quanti modi ci sono per distribuire 7 monete da 1 euro tra 3 bambini? (Tipi di contenitori "bambini" = 3, numero di oggetti "monete" = 7).
  - Quanti modi ci sono per comprare 5 paste in una pasticceria che ha 4 tipi di paste? (Tipi di paste = 4, numero di paste da comprare = 5).

Tabella Riassuntiva per la Scelta della Formula

Caratteristica	Ordine Importa?	Ripetizione Permes-sa?	Formula da Usare	Parole Chiave Tipiche
Permutazioni Semplici	Sì	No	$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	Ordinare, Disporre, Classificare, Prime posizioni, Anagrammi (senza ripetizioni)
Combinazioni Semplici	No	No	$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Scegliere gruppi, Selezionare, Comitati, Mani di carte, Gusti di gelato (diversi)
Permutazioni con Ripetizione (semplice)	Sì	Sì	n^k	Combinazioni con ripetizione (sequenze), Codici, Password, Targhe, Combinazioni serrature
Permutazioni con Ripetizione (oggetti specifici)	Sì	Sì (implicita)	$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$	Anagrammi (con lettere ripetute), Disporre oggetti non tutti diversi
Combinazioni con Ripetizione	No	Sì	$C_{rip}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$	Scegliere con ripetizione, Distribuire oggetti identici, Gelati (con ripetizioni), Paste

Consigli Aggiuntivi

- **Leggi attentamente la domanda:** Identifica se l'ordine è importante e se la ripetizione è permessa. Sottolinea le parole chiave.
- **Fai esempi semplici:** Prima di affrontare un problema complesso, prova a visualizzare un caso più piccolo e manuale per capire la logica.

- **Verifica la tua risposta:** Rifletti se il numero che hai ottenuto ha senso nel contesto del problema (es: il numero di combinazioni dovrebbe essere minore del numero di permutazioni per lo stesso n e k se l'ordine non importa).

Esercizio 1

Parte 1: Combinazione di 6 cifre

Abbiamo una serratura con combinazione di 6 cifre, dove ogni cifra può essere scelta tra 0 e 9 (10 possibilità). Assumiamo che le cifre possano essere ripetute.

Numero totale di combinazioni possibili: Per ogni posizione abbiamo 10 scelte, e ci sono 6 posizioni. Quindi, il numero totale di combinazioni è:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1,000,000$$

Probabilità di aprire la serratura al primo tentativo: C'è solo una combinazione corretta. La probabilità di indovinare al primo tentativo è:

$$P(\text{aprire con 6 cifre}) = \frac{\text{Numero di combinazioni corrette}}{\text{Numero totale di combinazioni possibili}} = \frac{1}{1,000,000}$$

Parte 2: Combinazione di 6 lettere (X, Y, Z, W)

Ora la combinazione è di 6 lettere, scelte tra le 4 lettere X, Y, Z, W. Anche in questo caso, assumiamo che le lettere possano essere ripetute.

Numero totale di combinazioni possibili: Per ogni posizione abbiamo 4 scelte, e ci sono 6 posizioni. Quindi, il numero totale di combinazioni è:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6 = 4096$$

Probabilità di aprire la serratura al primo tentativo: Anche qui c'è solo una combinazione corretta. La probabilità di indovinare al primo tentativo è:

$$P(\text{aprire con 6 lettere}) = \frac{\text{Numero di combinazioni corrette}}{\text{Numero totale di combinazioni possibili}} = \frac{1}{4096}$$

Risposta Esercizio 1:

- Per la combinazione di 6 cifre, la probabilità è $\frac{1}{1{,}000{,}000}$.
- Per la combinazione di 6 lettere (X, Y, Z, W), la probabilità è $\frac{1}{4096}$.

Esercizio 2

Parte 1: Scommessa sui primi 5 classificati in ordine

Ci sono 40 concorrenti e dobbiamo indovinare l'ordine esatto dei primi 5. L'ordine è importante.

Numero totale di possibili ordinamenti dei primi 5: Dobbiamo calcolare le permutazioni di 40 oggetti presi 5 alla volta, indicato come $P(40, 5)$:

$$P(40, 5) = \frac{40!}{(40-5)!} = \frac{40!}{35!} = 40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 = 78, 960, 960$$

Probabilità di vincere: C'è solo un ordine corretto. La probabilità di vincere è:

$$P(\text{ordine esatto}) = \frac{\text{Numero di ordinamenti corretti}}{\text{Numero totale di ordinamenti possibili}} = \frac{1}{78, 960, 960}$$

Parte 2: Scommessa sui nomi dei primi cinque, senza precisare l'ordine

Dobbiamo indovinare i 5 concorrenti che saranno nei primi 5 posti, ma l'ordine non importa.

Numero totale di possibili gruppi di 5 concorrenti: Dobbiamo calcolare le combinazioni di 40 oggetti presi 5 alla volta, indicato come $C(40, 5)$ o $\binom{40}{5}$:

$$C(40, 5) = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = \frac{40!}{5!35!} = \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 658, 008$$

Probabilità di vincere: C'è solo un gruppo corretto di 5 concorrenti. La probabilità di vincere è:

$$P(\text{nomi senza ordine}) = \frac{\text{Numero di gruppi corretti}}{\text{Numero totale di gruppi possibili}} = \frac{1}{658, 008}$$

Risposta Esercizio 2:

- Scommettendo sull'ordine esatto, la probabilità è $\frac{1}{78{,}960{,}960}$.
- Scommettendo sui nomi senza ordine, la probabilità è $\frac{1}{658{,}008}$.

Esercizio 3

Parte 1: Probabilità che scelgano lo stesso bar

Ci sono 4 bar e 3 amici. Ogni amico sceglie un bar indipendentemente.

Numero totale di possibili combinazioni di scelte dei bar: Ogni amico ha 4 scelte, e ci sono 3 amici. Quindi, il numero totale di combinazioni è:

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$$

Numero di casi favorevoli (tutti nello stesso bar): Ci sono 4 modi in cui tutti possono scegliere lo stesso bar (tutti al bar 1, tutti al bar 2, tutti al bar 3, o tutti al bar 4).

Probabilità che scelgano lo stesso bar:

$$P(\text{stesso bar}) = \frac{\text{Numero di casi favorevoli}}{\text{Numero totale di casi possibili}} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

Parte 2: Probabilità che scelgano tre bar differenti

Vogliamo che ogni amico scelga un bar diverso.

Numero di casi favorevoli (tre bar differenti):

- Il primo amico ha 4 scelte.
- Il secondo amico deve scegliere un bar diverso dal primo, quindi ha 3 scelte.
- Il terzo amico deve scegliere un bar diverso dai primi due, quindi ha 2 scelte.

Numero di casi favorevoli $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

Probabilità che scelgano tre bar differenti:

$$P(\text{tre bar differenti}) = \frac{\text{Numero di casi favorevoli}}{\text{Numero totale di casi possibili}} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

Risposta Esercizio 3:

- La probabilità che scelgano lo stesso bar è $\frac{1}{16}$.
- La probabilità che scelgano tre bar differenti è $\frac{3}{8}$.