Scheda 1

Alessandro Amella & GPT

10 febbraio 2025

Esercizio 1

Esercizio 1. Una roulette semplificata è formata da 12 numeri che sono "rosso" (R) e "nero" (N) in base allo schema seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R	R	N	N	R	N	N	R	N	N	R	R

(a) Determinare uno spazio di probabilità che descriva l'esperimento aleatorio.
Siano

- A = "esce un numero pari",
- B = "esce un numero rosso",
- C = "esce un numero ≤ 3",
- D = "esce un numero ≤ 6",
- E = "esce un numero ≤ 8",
- F = "esce un numero dispari ≤ 3".

Calcolare le seguenti probabilità condizionate: (b) $P(A|C)$, $P(C|A)$, $P(B|C)$, $P(A|F)$, $P(D|F)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$.
Stabilire quindi se: (c) gli eventi A, B e D sono a 2 a 2 indipendenti; (d) A, B, D costituiscono una famiglia di eventi indipendenti; (e) A, B, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti; (f) A, C, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti; (g) F è indipendente da A; F è indipendente da D.

Soluzione

(a) Lo spazio di probabilità è $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, dove $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ è l'insieme delle parti di Ω, e per ogni evento $E \subseteq \Omega$, la probabilità $P(E)$ è data da

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{12}.$$

(b) Definiamo gli eventi:

- $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
- $B = \{1, 2, 5, 8, 11, 12\}$
- $C = \{1, 2, 3\}$
- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $F = \{1, 3\}$

Calcoliamo le probabilità di base:

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \quad P(D) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(E) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad P(F$$

Ora calcoliamo le probabilità condizionate:

- $A \cap C = \{2\}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$. $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3}$.
- $P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6}$.
- $B \cap C = \{1, 2\}$, $P(B \cap C) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3}$.
- $A \cap F = \emptyset$, $P(A \cap F) = 0$. $P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0}{1/6} = 0$.
- $D \cap F = \{1, 3\} = F$, $P(D \cap F) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. $P(D|F) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{1/6}{1/6} = 1$.
- $A \cap B = \{2, 8, 12\}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$.
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$.

(c) Verifichiamo se A, B e D sono a 2 a 2 indipendenti.

- $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. A e B sono indipendenti.

- $P(A \cap D) = \frac{1}{4} = P(A)P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. A e D sono indipendenti.
- $B \cap D = \{1, 2, 5\}$, $P(B \cap D) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = P(B)P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. B e D sono indipendenti.

Sì, gli eventi A, B e D sono a 2 a 2 indipendenti.

(d) Verifichiamo se A, B, D costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.

$$P(A \cap B \cap D) = P(\{2\}) = \frac{1}{12} \neq P(A)P(B)P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

No, A, B, D non costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.

(e) Verifichiamo se A, B, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti. Verifica indipendenza a 2 a 2:

- A e B: indipendenti (già verificato).
- A e E: $A \cap E = \{2, 4, 6, 8\}$, $P(A \cap E) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = P(A)P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
- B e E: $B \cap E = \{1, 2, 5, 8\}$, $P(B \cap E) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = P(B)P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Sono a 2 a 2 indipendenti. Verifica indipendenza mutua:

$$P(A \cap B \cap E) = P(\{2, 8\}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = P(A)P(B)P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Sì, A, B, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.

(f) Verifichiamo se A, C, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti. Verifica indipendenza a 2 a 2:

- A e C: $P(A \cap C) = \frac{1}{12} \neq P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. A e C non sono indipendenti.

No, A, C, E non costituiscono una famiglia di eventi indipendenti poichè A e C non sono indipendenti.

(g) Verifichiamo se F è indipendente da A e da D.

- F e A: $P(F \cap A) = 0 \neq P(F)P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$. F non è indipendente da A.
- F e D: $P(F \cap D) = P(F) = \frac{1}{6} \neq P(F)P(D) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$. F non è indipendente da D.

F non è indipendente da A; F non è indipendente da D.

Risposte

(a) Lo spazio di probabilità è $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, dove $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $P(E) = \frac{|E|}{12}$ per $E \subseteq \Omega$.

(b) $P(A|C) = \frac{1}{3}$, $P(C|A) = \frac{1}{6}$, $P(B|C) = \frac{2}{3}$, $P(A|F) = 0$, $P(D|F) = 1$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$.

(c) Sì, gli eventi A, B e D sono a 2 a 2 indipendenti.

(d) No, A, B, D non costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.

(e) Sì, A, B, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.

(f) No, A, C, E non costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.

(g) F non è indipendente da A; F non è indipendente da D.

Esercizio 6

Esercizio 6 (Urna di Pòlya). Supponiamo che un'urna contenga 1 pallina rossa e 1 pallina bianca. Una pallina è estratta e se ne guarda il colore. Essa viene poi rimessa nell'urna insieme ad una pallina dello stesso colore (estrazione con rinforzo). Sia R_i l'evento "all'i-esima estrazione viene estratta una pallina rossa" e sia B_i l'evento "all'i-esima estrazione viene estratta una pallina bianca". Si calcolino: (a) $P(R_2)$, (b) sapendo che la seconda estratta è rossa, è più probabile che la prima pallina estratta sia stata rossa o bianca?

Soluzione

(a) Per calcolare $P(R_2)$, consideriamo i possibili esiti della prima estrazione. Ci sono due casi possibili per la prima estrazione: estrarre una pallina rossa (R_1) o estrarre una pallina bianca (B_1). Inizialmente, l'urna contiene 1 pallina rossa e 1 pallina bianca, quindi $P(R_1) = \frac{1}{2}$ e $P(B_1) = \frac{1}{2}$.

Se si verifica R_1, dopo la prima estrazione e il rinforzo, l'urna conterrà 2 palline rosse e 1 pallina bianca, per un totale di 3 palline. In questo caso, la probabilità di estrarre una pallina rossa alla seconda estrazione, condizionata a R_1, è $P(R_2|R_1) = \frac{2}{3}$.

Se si verifica B_1, dopo la prima estrazione e il rinforzo, l'urna conterrà 1 pallina rossa e 2 palline bianche, per un totale di 3 palline. In questo caso, la probabilità di estrarre una pallina rossa alla seconda estrazione, condizionata a B_1, è $P(R_2|B_1) = \frac{1}{3}$.

Utilizzando la legge della probabilità totale, possiamo calcolare $P(R_2)$:

$$P(R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|B_1)P(B_1) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(b) Vogliamo confrontare la probabilità che la prima pallina estratta sia stata rossa, dato che la seconda è rossa, $P(R_1|R_2)$, con la probabilità che la prima pallina estratta sia stata bianca, dato che la seconda è rossa, $P(B_1|R_2)$. Utilizziamo il teorema di Bayes:

$$P(R_1|R_2) = \frac{P(R_2|R_1)P(R_1)}{P(R_2)} \quad \text{e} \quad P(B_1|R_2) = \frac{P(R_2|B_1)P(B_1)}{P(R_2)}.$$

Abbiamo già calcolato $P(R_2) = \frac{1}{2}$, $P(R_1) = \frac{1}{2}$, $P(B_1) = \frac{1}{2}$, $P(R_2|R_1) = \frac{2}{3}$, $P(R_2|B_1) = \frac{1}{3}$. Sostituendo questi valori nelle formule:

$$P(R_1|R_2) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$$P(B_1|R_2) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Confrontiamo $P(R_1|R_2) = \frac{2}{3}$ e $P(B_1|R_2) = \frac{1}{3}$. Poiché $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$, è più probabile che la prima pallina estratta sia stata rossa, sapendo che la seconda pallina estratta è rossa.

Risposte

(a) $P(R_2) = \frac{1}{2}$.

(b) È più probabile che la prima pallina estratta sia stata rossa.