

Scheda 1

Alessandro Amella & GPT

10 febbraio 2025

Esercizio 1

Si osservano i risultati del lancio di una moneta e di un dado. Determinare uno spazio campionario Ω che descriva tutti gli esiti dell'esperimento.

Soluzione: Sia T l'esito "Testa" e C l'esito "Croce" per il lancio della moneta. Sia $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'insieme dei possibili esiti del lancio del dado. Lo spazio campionario Ω che descrive tutti gli esiti dell'esperimento è dato dall'insieme delle coppie ordinate (x, y) , dove x è l'esito del lancio della moneta e y è l'esito del lancio del dado. Quindi,

$$\Omega = \{(T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6), (C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)\}$$

Esercizio 2

Chiara e Marco acquistano insieme uno dei 50 biglietti di una pesca di beneficenza. Ci sono 50 premi di cui 7 piacciono a Chiara, 5 a Marco e 1 solo ad entrambi.

1. Determinare uno spazio campionario che descriva i possibili esiti della pesca di beneficenza.
2. Si considerino gli eventi:
 - C = "il premio piacerà a Chiara",
 - M = "il premio piacerà a Marco".

Scrivere in termini di C ed M gli eventi:

- (a) il premio piacerà a entrambi,
- (b) il premio piacerà ad almeno uno dei due,
- (c) a nessuno dei due piacerà il premio,

(d) il premio piacerà a uno solo dei due.

Soluzione:

1. Uno spazio campionario che descrive i possibili esiti della pesca di beneficenza può essere l'insieme dei 50 possibili premi. Denotando i premi con i numeri da 1 a 50, possiamo scrivere:

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 50\}$$

dove ogni numero rappresenta un possibile premio estratto.

2. (a) Il premio piacerà a entrambi: $C \cap M$
(b) Il premio piacerà ad almeno uno dei due: $C \cup M$
(c) A nessuno dei due piacerà il premio: $(C \cup M)^c = C^c \cap M^c$
(d) Il premio piacerà a uno solo dei due: $(C \cap M^c) \cup (C^c \cap M)$

Esercizio 3

Sia Ω uno spazio campionario e siano A , B e C tre eventi. Tradurre in formule i seguenti eventi associati ad A , B e C :

1. almeno un evento si verifica,
2. al più un evento si verifica,
3. nessun evento si verifica,
4. tutti gli eventi si verificano,
5. si verifica esattamente un evento,
6. due eventi su tre si verificano.

Tradurre in termini probabilistici le seguenti affermazioni:

7. A e C si escludono a vicenda,
8. almeno un evento fra B e C si verifica certamente,
- (7a) A e C si escludono a vicenda quasi certamente,
- (8a) almeno un evento fra B e C si verifica quasi certamente.

Soluzione:

1. Almeno un evento si verifica: $A \cup B \cup C$
 2. Al più un evento si verifica: $(A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
 3. Nessun evento si verifica: $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$
 4. Tutti gli eventi si verificano: $A \cap B \cap C$
 5. Si verifica esattamente un evento: $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
 6. Due eventi su tre si verificano: $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$
 7. A e C si escludono a vicenda: $P(A \cap C) = 0$
 8. Almeno un evento fra B e C si verifica certamente: $P(B \cup C) = 1$
- (7a) A e C si escludono a vicenda quasi certamente: $P(A \cap C) = 0$
- (8a) Almeno un evento fra B e C si verifica quasi certamente: $P(B \cup C) = 1$

Esercizio 4

Una moneta viene lanciata due volte. Alessandro vince se al primo lancio esce testa mentre Bernardo vince se al secondo lancio esce croce. Indichiamo con A e B questi due eventi.

1. Determinare uno spazio campionario che descriva tutti i possibili esiti dell'esperimento.
2. Esprimere i seguenti eventi in termini di A e B :
 - (a) Alessandro non vince,
 - (b) Bernardo non vince,
 - (c) Alessandro e Bernardo vincono entrambi,
 - (d) vince Alessandro ma non Bernardo,
 - (e) vince Bernardo ma non Alessandro,
 - (f) almeno uno dei due vince,
 - (g) nessuno dei due vince,
 - (h) vince soltanto uno dei due,

- (i) esce testa al primo lancio ed esce croce al primo lancio,
- (j) esce testa o croce al secondo lancio.

Soluzione:

1. Lo spazio campionario Ω per il lancio di una moneta due volte è:

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

dove H indica "Testa" e T indica "Croce".

2. Siano gli eventi:

- $A =$ "Alessandro vince" = "esce testa al primo lancio" = $\{HH, HT\}$
- $B =$ "Bernardo vince" = "esce croce al secondo lancio" = $\{HT, TT\}$

Esprimiamo gli eventi richiesti in termini di A e B :

- (a) Alessandro non vince: A^c
- (b) Bernardo non vince: B^c
- (c) Alessandro e Bernardo vincono entrambi: $A \cap B$
- (d) Vince Alessandro ma non Bernardo: $A \cap B^c$
- (e) Vince Bernardo ma non Alessandro: $B \cap A^c$
- (f) Almeno uno dei due vince: $A \cup B$
- (g) Nessuno dei due vince: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- (h) Vince soltanto uno dei due: $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$
- (i) Esce testa al primo lancio ed esce croce al primo lancio: \emptyset (evento impossibile)
- (j) Esce testa o croce al secondo lancio: Ω (evento certo)

Esercizio 5

Sia Ω uno spazio campionario e siano A, B, C e D quattro eventi. Tradurre in formule i seguenti eventi associati ad A, B, C e D .

1. Esattamente tre eventi su quattro si verificano.
2. Si verifica solo C .

3. Si verifica solo C oppure si verifica solo D .

4. Almeno un evento si verifica.

Soluzione:

1. Esattamente tre eventi su quattro si verificano:

$$(A \cap B \cap C \cap D^c) \cup (A \cap B \cap C^c \cap D) \cup (A \cap B^c \cap C \cap D) \cup (A^c \cap B \cap C \cap D)$$

2. Si verifica solo C :

$$C \cap A^c \cap B^c \cap D^c$$

3. Si verifica solo C oppure si verifica solo D :

$$(C \cap A^c \cap B^c \cap D^c) \cup (D \cap A^c \cap B^c \cap C^c)$$

4. Almeno un evento si verifica:

$$A \cup B \cup C \cup D$$