

Modulazioni Digitali e Codice di Hamming

1 Definizioni delle Modulazioni

- **ASK (Amplitude Shift Keying)**: la portante varia in **ampiezza**.
- **FSK (Frequency Shift Keying)**: la portante varia in **frequenza**.
- **PSK (Phase Shift Keying)**: la portante varia in **fase**.
- **QAM (Quadrature Amplitude Modulation)**: combina variazioni di ampiezza e fase.

2 Livelli e Bit per Simbolo

Formula generale:

$$\text{bit per simbolo} = \log_2(M) \quad (1)$$

dove M è il numero di livelli distinti.

Tecnica	Livelli (M)	bit/simbolo	Note
ASK	2	1	0 o A
FSK	2	1	f_1, f_2
PSK	4 (QPSK)	2	Fasi: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$
QAM	16	4	4 ampiezze \times 4 fasi

3 Codice di Hamming e Distanza di Hamming

3.1 Definizione della Distanza di Hamming

La **distanza di Hamming** tra due stringhe binarie è il numero di posizioni in cui i bit differiscono.

Esempio:

Stringa 1: 1010

Stringa 2: 1100

Distanza di Hamming = 2 (differenze in posizioni 2 e 4)

3.2 Codice di Hamming (7,4)

Il codice di Hamming rileva fino a 2 errori e corregge 1 errore singolo.

- 4 bit di dati: d_1, d_2, d_3, d_4
- 3 bit di parità: p_1, p_2, p_3

- Totale: 7 bit

Posizione	1	2	3	4	5	6	7
Bit	p_1	p_2	d_1	p_3	d_2	d_3	d_4

Calcolo dei bit di parità:

$$p_1 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_4 \quad (2)$$

$$p_2 = d_1 \oplus d_3 \oplus d_4 \quad (3)$$

$$p_3 = d_2 \oplus d_3 \oplus d_4 \quad (4)$$

3.3 Esempio di Codifica

Dati: $d_1 d_2 d_3 d_4 = 1011$

$$p_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \quad (5)$$

$$p_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \quad (6)$$

$$p_3 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \quad (7)$$

Codice trasmesso: 0110111

3.4 Rilevazione degli Errori

Se ricevo 0111111 (errore in posizione 5):

$$s_1 = p_1 \oplus d_1 \oplus d_2 \oplus d_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \quad (8)$$

$$s_2 = p_2 \oplus d_1 \oplus d_3 \oplus d_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \quad (9)$$

$$s_3 = p_3 \oplus d_2 \oplus d_3 \oplus d_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \quad (10)$$

Sindrome: $s_3 s_2 s_1 = 001_2 = 5_{10} \rightarrow$ errore in posizione 5.

4 Collegamento con le Modulazioni

4.1 Distanza di Hamming nelle Costellazioni

Le costellazioni sono progettate affinché i simboli adiacenti abbiano distanza di Hamming 1, riducendo l'impatto degli errori.

Fase	Codifica Gray
0°	00
90°	01
180°	11
270°	10

4.2 Codifica Gray

La **codifica Gray** assicura che simboli adiacenti differiscano di un solo bit.

Vantaggio: in presenza di errore verso un simbolo adiacente, si ha solo 1 bit errato.

5 Esercizio Tipico con Hamming

Domanda: Trasmettere 1 Mbps su 500 kHz con Hamming (7,4).

- Efficienza Hamming: $\frac{4}{7} = 0.571$
- Bit rate effettivo: $1 \times 0.571 = 0.571$ Mbps
- Con QPSK (2 bit/simbolo): Symbol rate = $\frac{0.571}{2} = 0.286$ Msym/s
- Banda richiesta ≈ 0.286 MHz < 0.5 MHz \rightarrow **Compatibile**

6 Esempio Pratico Completo

Scenario: Trasmettere 101011 con:

- Codice Hamming (7,4)
- QPSK + codifica Gray

1. Divisione in blocchi da 4 bit:

- Blocco 1: 1010
- Blocco 2: 1100 (con padding)

2. Codifica Hamming:

- 1010 \rightarrow 0101010
- 1100 \rightarrow 1011100

3. QPSK (2 bit/simbolo):

- Bit stream: 01010101011100
- Simboli: 01, 01, 01, 01, 01, 11, 00