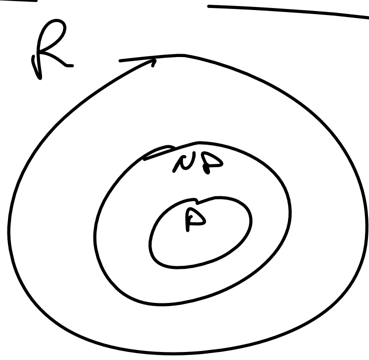
NTIME$(t(n))$ → NP    DTIME$(t(n))$ → P

$P \subseteq NP$

↳ $P = NP$



- **RIDUZIONE POLINOMIALE**

SIANO A, B DUE LINGUAGGI.

UNA RIDUZIONE POLINOMIALE DA A A B
È UNA FUNZIONE $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$
t.c. $f$ È CALCOLABILE IN TEMPO POLINOMIALE

$\forall w \quad w \in A \iff f(w) \in B$

DENOTIAMO LA RIDUZIONE CON $A \leq_p B$

---

- **NP-HARDNESS**

UN LINGUAGGIO $L$ È NP-HARD SE
$\forall L' \in NP \quad L' \leq_p L$

- **NP-COMPLETENESS**

UN LINGUAGGIO $L$ È NP-COMPLETE SE
1) $L \in NP$
2) $L$ È NP-HARD

THEOREM:

Sia $L$ un linguaggio NP-completo.
Allora $L \in P \iff P = NP$.

DIM:

$\Leftarrow)$ $P = NP \Rightarrow L \in P$

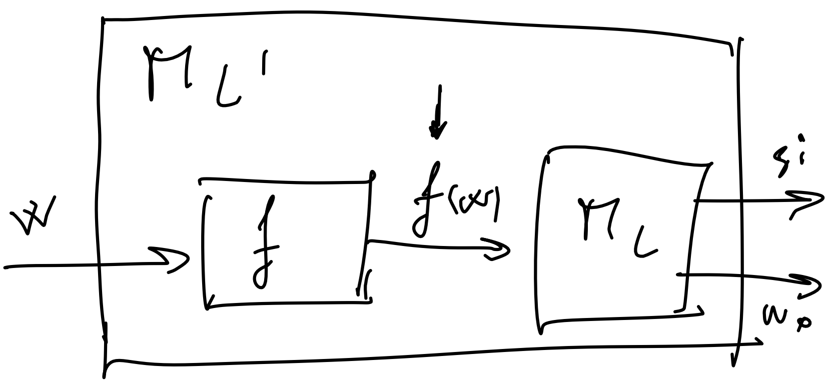
$\Rightarrow)$ $L \in P \Rightarrow P = NP$

$P \subseteq NP$. Per dimostrare che $P = NP$ ci manca da mostrare $NP \subseteq P$.

Se riusciamo a mostrare che $L \in P \Rightarrow NP \subseteq P$ ✓

- Siccome $L$ è NP-completo, $L$ è NP-hard

$\forall L' \in NP \quad L' \leq_p L \rightsquigarrow f$




$O(n^c + n^{c \cdot d})$

$n = \|w\|$

$c \geq 1$, fixed

1) $w \rightsquigarrow f(w) = y \quad O(n^c) \quad \|f(w)\|$ è $O(n^c)$

2) Assumiamo running time $M_L$ $O(n^d)$

$O((n^c)^d)$ è $O(n^{c \cdot d})$

# SAT È NP-COMPLETO

THEOREM: TRANSITIVITÀ DELLE RIDUZIONI POLINOMIALI

SIANO $A, B, C$ TRE LINGUAGGI

SE $A \le_p B$ E $B \le_p C$, ALLORA $A \le_p C$

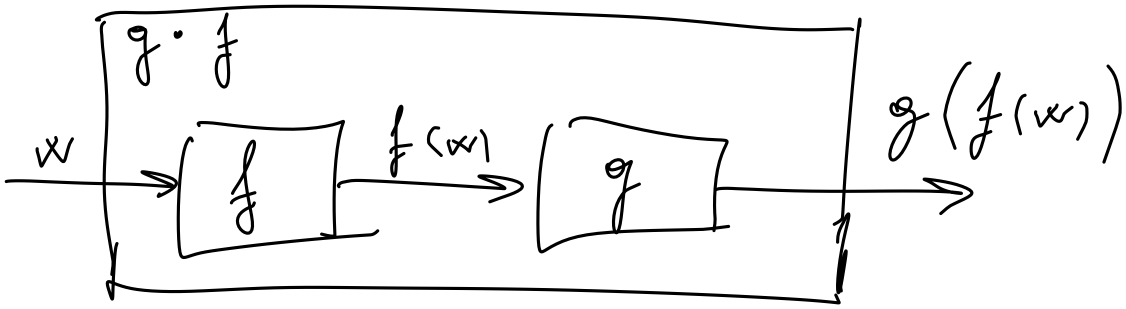
DIM:

$A \le_p B$ $\quad f \quad O(n^c) \quad c \geq 1$ FIXED

$B \le_p C$ $\quad g \quad O(n^d) \quad d \geq 1$ FIXED

$g \circ f$

$A \le_p C \qquad g(f(w))$




$\rightarrow f(w) \quad O(n^c) \qquad \|f(w)\|$ È $O(n^c)$

$\rightarrow g(f(w)) \quad O(\|f(w)\|^d) \quad O((n^c)^d) \quad O(n^{c \cdot d})$

---

THEOREM

SIA $A$ UN LINGUAGGIO NP-HARD

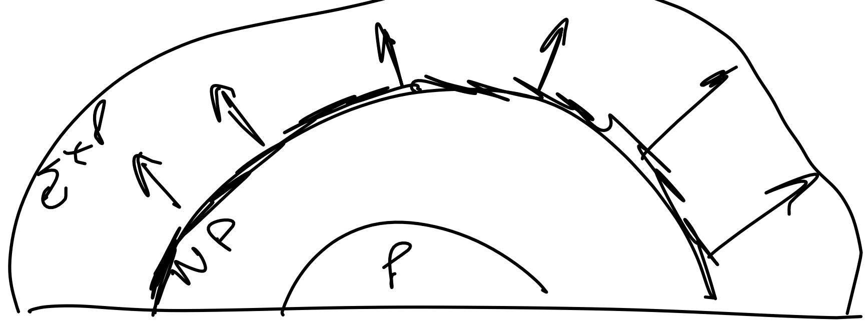
SE $B$ È UN LINGUAGGIO t.c. $A \le_p B$

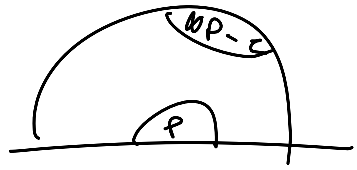
ALLORA $B$ È NP-HARD

DIM: POICHÉ $A$ È NP-HARD

$\forall L' \in NP, \; L' \le_p A \; . \; A \le_p B$

$L' \le_p B$




3SAT $\in$ NP-completo        CNF

3 CNF

$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee x_5)$

- 3SAT $\overset{?}{\grave{e}}$ NP
- 3SAT è NP-HARD

SAT $\leq_p$ 3SAT

$\underset{(CNF)}{\varphi} \rightsquigarrow \underset{(3CNF)}{\psi}$

$\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m \rightsquigarrow \varphi'$

$C_i = (l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$

$C_i \to C_i' = (l_1 \vee l_2 \vee h_i)$

$C_i \to C_i'' = (l_3 \vee \cdots \vee l_k \vee \neg h_i)$        $2m$

$\Rightarrow)$ $\varphi$ sodd. $\Rightarrow$ $\psi$ sodd

$\sigma \rightsquigarrow \underline{\tau_\sigma}$

$C_i = (l_1 \vee \cdots \vee l_k)$

$C_i'$        $C_i''$

$\Leftarrow)$ $\psi$ SODD $\Rightarrow$ $\varphi$ SODD.

$\varphi'$ SODD DA CUI ESISTE

$\tau$ SODDISFA $\varphi'$ $\rightsquigarrow$ $\alpha_\tau$

$$\left.\begin{array}{l} c_i' = (l_1 \lor l_2 \lor h_i) \\ c_i'' = (l_3 \lor \dots \lor l_k \lor \neg h_i) \end{array}\right\} \Rightarrow c_i$$

---

$$C_i = (l_1 \lor l_2 \lor l_3) \begin{array}{l} \nearrow c_i' = (l_1 \lor h_i) \\ \searrow c_i'' = \underline{(l_2 \lor l_3 \lor \neg h_i)} \end{array}$$

2SAT $\in$ P

---

EXACT-3SAT È NP-COMPLETO

$3SAT \leq_P EXACT\text{-}3SAT$