Lezione di Informatica Teorica
Problemi NP-Completi

Appunti da Trascrizione Automatica

30 giugno 2025

Indice

1 Introduzione ai Problemi NP-Completi

Dopo aver definito la nozione di NP-Completezza, in questa lezione esamineremo diversi problemi noti per essere NP-Completi. L'obiettivo è comprendere cosa significhi per un problema essere NP-Hard e NP-Completo, e come dimostrarlo attraverso riduzioni polinomiali.

1.1 Richiami su Exact 3-SAT

Il problema Exact 3-SAT (o 3-SAT Esatto) è una variante di 3-SAT in cui ogni clausola della formula booleana deve contenere esattamente tre letterali. Ieri era stata lasciata la domanda di dimostrarne l'NP-Hardness.

Dimostrazione dell'NP-Hardness di Exact 3-SAT: Si parte da una formula 3-SAT generica, dove le clausole hanno "al più" tre letterali. Dobbiamo trasformarla in una formula equivalente in cui ogni clausola ha "esattamente" tre letterali. La trasformazione procede clausola per clausola:

- Se una clausola ha esattamente tre letterali, la si copia così com'è.
- Se una clausola ha meno di tre letterali (es. uno o due), si prendono a caso uno o più letterali già presenti in quella clausola e li si replicano fino a raggiungere esattamente tre letterali.

Questa trasformazione è polinomiale e mantiene l'equivalenza semantica della formula. Di conseguenza, se 3-SAT è NP-Hard, anche Exact 3-SAT lo è. Per questa ragione, d'ora in avanti, quando si parlerà di 3-SAT ci si potrà riferire indistintamente alla variante con "al più" o "esattamente" tre letterali, a seconda della convenienza per la riduzione.

2 Independent Set (IS)

L'Independent Set è il primo problema NP-Completo che esaminiamo in dettaglio.

Definizione 2.1 (Independent Set). Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un Independent Set (IS) $S \subseteq V$ è un sottoinsieme dei suoi nodi tale per cui non esiste alcun arco tra nessuna coppia di nodi in S. Formalmente:

$$\forall u, v \in S, \quad (u, v) \notin E$$

Ogni grafo ammette un Independent Set (es. il set vuoto o un singolo nodo). I problemi interessanti riguardano la ricerca di Independent Set "grandi".

Definizione 2.2 (Independent Set (Problema di Decisione)). Il problema di decisione Independent Set è definito come l'insieme delle coppie $\langle G, K \rangle$ tali che G è un grafo non orientato, K è un numero intero, ed esiste un Independent Set in G di taglia (cardinalità) almeno K.

2.1 Membership in NP

Proposizione 2.1. Il problema Independent Set appartiene alla classe NP.

Dimostrazione. Per dimostrare che IS $\in$ NP, dobbiamo mostrare che esiste una Macchina di Turing Non-Deterministica (MTND) che decide un'istanza in tempo polinomiale. Una MTND può risolvere IS come segue:

1. Guess (Non-Deterministic Choice): La MTND "indovina" (o sceglie in modo non-deterministico) un sottoinsieme S' di nodi di V. Questo può essere fatto in tempo polinomiale (ad esempio, per ogni nodo, decide se includerlo o meno in S').

2. Check (Deterministic Verification): La MTND verifica deterministicamente due condizioni:
   - La cardinalità di S' è almeno K: $|S'| \geq K$.
   - Non esistono archi tra coppie di nodi in S': Per ogni coppia di nodi $u, v \in S'$ ($u \neq v$), verifica che $(u, v) \notin E$.

   Se entrambe le condizioni sono soddisfatte, la MTND accetta l'istanza. Altrimenti, la rifiuta.

Entrambi i passaggi (guess e check) possono essere eseguiti in tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'input (numero di nodi e archi del grafo). Quindi, Independent Set $\in$ NP.

2.2 Dimostrazione NP-Hardness: $3SAT \leq_p IS$

Per dimostrare che Independent Set è NP-Hard, effettuiamo una riduzione polinomiale da 3-SAT a Independent Set.

Teorema 2.1. $3SAT \leq_p IS$. Di conseguenza, Independent Set è NP-Hard.

Dimostrazione. Sia $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ un'istanza di 3-SAT, dove ogni C_i è una clausola con esattamente tre letterali (possiamo usare la variante Exact 3-SAT). Vogliamo costruire una coppia $\langle G, K \rangle$ tale che ϕ è soddisfacibile se e solo se G ha un Independent Set di taglia almeno K.

Costruzione della Trasformazione (f):

1. Nodi (V'): Per ogni letterale in ogni clausola, creiamo un nodo nel grafo G. Se $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$, creiamo tre nodi distinti v_{i1}, v_{i2}, v_{i3} per questa clausola. Quindi, se ϕ ha m clausole, G avrà $3m$ nodi.

2. Archi (E'): Gli archi sono di due tipi:
   - Archi di Clausola: Per ogni clausola C_i, aggiungiamo un arco tra ogni coppia di nodi corrispondenti ai letterali della stessa clausola. Ad esempio, per $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$, aggiungiamo gli archi (v_{i1}, v_{i2}), (v_{i1}, v_{i3}), (v_{i2}, v_{i3}). Questo forma un triangolo (una cricca di taglia 3) per ogni clausola.
   - Archi di Contraddizione: Aggiungiamo un arco tra due nodi v_{ij} e v_{kl} se i loro letterali corrispondenti l_{ij} e l_{kl} sono opposti (ad esempio, x_1 e $\neg x_1$).

3. Valore K: Il valore K per l'Independent Set è il numero di clausole in ϕ, ovvero $K = m$.

La costruzione è chiaramente polinomiale in m e nel numero di variabili.

Esempio di Trasformazione: Sia $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5)$.

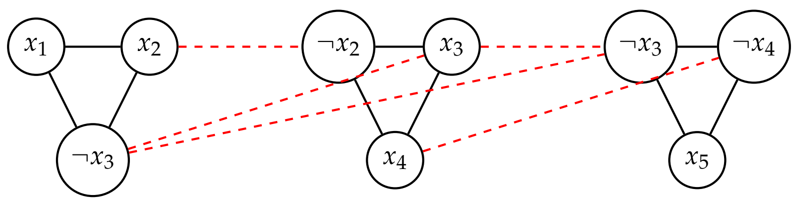


Figura 1: Grafo G costruito da ϕ

Correttezza della Riduzione: Dobbiamo dimostrare che ϕ è soddisfacibile se e solo se G ha un Independent Set di taglia m.

2.2.1 $\Longrightarrow$ (Se ϕ è soddisfacibile, allora G ha un IS di taglia m)

Supponiamo che ϕ sia soddisfacibile. Allora esiste un assegnamento di verità σ che soddisfa ϕ. Costruiamo un insieme S_σ nel grafo G come segue: per ogni clausola C_i di ϕ, dato che σ soddisfa C_i, esiste almeno un letterale in C_i che è vero sotto σ. Scegliamo uno di questi letterali veri (arbitrariamente se ce ne sono più di uno) e aggiungiamo il nodo corrispondente a S_σ. Poiché ci sono m clausole e scegliamo esattamente un nodo per ogni clausola, la taglia di S_σ sarà $|S_\sigma| = m$.

Ora, dobbiamo dimostrare che S_σ è un Independent Set. Assumiamo per contraddizione che S_σ non sia un Independent Set. Questo significa che esistono due nodi $u, v \in S_\sigma$ tali che $(u, v) \in E'$. Per costruzione degli archi, questi due nodi u, v possono essere collegati in due modi:

1. u e v provengono dalla stessa clausola: Questo è impossibile, perché abbiamo scelto solo un nodo per ogni clausola, e i nodi della stessa clausola sono sempre interconnessi. Se avessimo scelto due nodi dalla stessa clausola, questi sarebbero collegati, ma S_σ è costruito selezionando un unico nodo per clausola.

2. u e v provengono da clausole diverse, ma i loro letterali sono opposti: Se u e v sono collegati e provengono da clausole diverse, ciò implica che i loro letterali corrispondenti l_u e l_v sono opposti (es. x e $\neg x$). Ma per costruzione di S_σ, sia l_u che l_v devono essere veri sotto l'assegnamento σ. Questo è impossibile, poiché σ è un assegnamento di verità consistente (non può assegnare vero sia a x che a $\neg x$).

Entrambi i casi portano a una contraddizione. Pertanto, S_σ deve essere un Independent Set di taglia m.

2.2.2 $\Longleftarrow$ (Se G ha un IS di taglia m, allora ϕ è soddisfacibile)

Supponiamo che G abbia un Independent Set S di taglia m. Per costruzione, ogni "triangolo" di nodi corrispondente a una clausola C_i forma una cricca di taglia 3. Poiché S è un Independent Set, non può contenere più di un nodo da ciascuno di questi triangoli (altrimenti non sarebbe un IS, dato che tutti i nodi in un triangolo sono interconnessi). Poiché $|S| = m$ (il numero di clausole), questo significa che S deve contenere esattamente un nodo da ciascuna delle m triplette di nodi (triangoli) del grafo.

Ora, costruiamo un assegnamento di verità σ_S per le variabili di ϕ basato su S:

- Per ogni variabile x_j, se un nodo corrispondente al letterale x_j è in S, allora $\sigma_S(x_j) = \text{Vero}$.
- Per ogni variabile x_j, se un nodo corrispondente al letterale $\neg x_j$ è in S, allora $\sigma_S(x_j) = \text{Falso}$.
- Se una variabile x_j non ha né x_j né $\neg x_j$ in S, le si può assegnare un valore arbitrario (es. Vero).

Dobbiamo dimostrare che σ_S è un assegnamento consistente. Non può assegnare sia Vero che Falso alla stessa variabile, perché se così fosse, significherebbe che sia x_j che $\neg x_j$ sono rappresentati da nodi in S. Ma per costruzione del grafo, nodi corrispondenti a letterali opposti sono collegati da un arco. Se x_j e $\neg x_j$ fossero entrambi in S, S non sarebbe un Independent Set, il che contraddice l'ipotesi. Quindi σ_S è consistente.

Infine, dobbiamo dimostrare che σ_S soddisfa ϕ. Per ogni clausola C_i, sappiamo che S contiene esattamente un nodo v proveniente dalla tripletta di nodi di C_i. Sia l il letterale corrispondente a v. Per costruzione di σ_S, il valore di verità di l sarà Vero sotto σ_S. Questo significa che ogni clausola C_i contiene almeno un letterale vero, e quindi ϕ è soddisfatta da σ_S.

Poiché la trasformazione è polinomiale e la dimostrazione di equivalenza è valida in entrambi i versi, abbiamo dimostrato che $3SAT \leq_p IS$. Dato che 3-SAT è NP-Hard, anche Independent Set è NP-Hard. Con IS $\in$ NP (dimostrato sopra), concludiamo che Independent Set è NP-Completo.

3 Vertex Cover (VC)

Definizione 3.1 (Vertex Cover). Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un Vertex Cover (VC) $C \subseteq V$ è un sottoinsieme dei suoi nodi tale per cui ogni arco $(u, v) \in E$ ha almeno un endpoint in C. Formalmente:

$$\forall (u, v) \in E, \quad u \in C \lor v \in C$$

Ogni grafo ammette un Vertex Cover (es. l'intero insieme di nodi V). I problemi interessanti riguardano la ricerca di Vertex Cover "piccoli".

Definizione 3.2 (Vertex Cover (Problema di Decisione)). Il problema di decisione Vertex Cover è definito come l'insieme delle coppie $\langle G, K\rangle$ tali che G è un grafo non orientato, K è un numero intero, ed esiste un Vertex Cover in G di taglia (cardinalità) al più K.

3.1 Membership in NP

Proposizione 3.1. Il problema Vertex Cover appartiene alla classe NP.

Dimostrazione. Simile a Independent Set:

1. Guess: La MTND indovina un sottoinsieme C' di nodi di V.
2. Check: La MTND verifica deterministicamente:
   - La cardinalità di C' è al più K: $|C'| \leq K$.
   - Ogni arco è coperto da C': Per ogni arco $(u, v) \in E$, verifica che $u \in C'$ oppure $v \in C'$.

Entrambi i passaggi sono polinomiali. Quindi, Vertex Cover $\in$ NP.

3.2 Dimostrazione NP-Hardness: $IS \leq_p VC$

Per dimostrare che Vertex Cover è NP-Hard, effettuiamo una riduzione polinomiale da Independent Set a Vertex Cover. Questa riduzione si basa su un'importante proprietà di dualità.

Lemma 3.1 (Dualità IS-VC). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Un sottoinsieme $S \subseteq V$ è un Independent Set di G se e solo se il suo complemento $V \setminus S$ è un Vertex Cover di G.

Dimostrazione. $\Longrightarrow$ Supponiamo che S sia un Independent Set di G. Dobbiamo dimostrare che $C = V \setminus S$ è un Vertex Cover di G. Assumiamo per contraddizione che C non sia un Vertex Cover. Questo significa che esiste almeno un arco $(u, v) \in E$ tale che nessuno dei suoi endpoint è in C. Se $u \notin C$ e $v \notin C$, allora per definizione di complemento, $u \in S$ e $v \in S$. Ma se $u, v \in S$ e $(u, v) \in E$, allora S non sarebbe un Independent Set, il che contraddice la nostra ipotesi iniziale. Quindi la nostra assunzione è falsa, e C deve essere un Vertex Cover.

$\Longleftarrow$ Supponiamo che $C = V \setminus S$ sia un Vertex Cover di G. Dobbiamo dimostrare che S è un Independent Set di G. Assumiamo per contraddizione che S non sia un Independent Set. Questo significa che esiste almeno un arco $(u, v) \in E$ tale che entrambi i suoi endpoints u, v sono in S. Ma se $u \in S$ e $v \in S$, allora $u \notin C$ e $v \notin C$. Questo significa che l'arco (u, v) non è coperto da C, il che contraddice la nostra ipotesi che C sia un Vertex Cover. Quindi la nostra assunzione è falsa, e S deve essere un Independent Set.

Il lemma è dimostrato.

Teorema 3.1. $IS \leq_p VC$. Di conseguenza, Vertex Cover è NP-Hard.

Dimostrazione. Sia $\langle G, K \rangle$ un'istanza di Independent Set. Vogliamo costruire una coppia $\langle H, L \rangle$ tale che G ha un Independent Set di taglia almeno K se e solo se H ha un Vertex Cover di taglia al più L.

Costruzione della Trasformazione (f):

1. Grafo H: $H = G$. Il grafo rimane invariato.

2. Valore L: $L = |V| - K$, dove $|V|$ è il numero totale di nodi in G (e quindi in H).

Questa trasformazione è chiaramente polinomiale (ricopiare un grafo e fare una sottrazione).

Correttezza della Riduzione:

3.2.1 $\implies$ (Se G ha un IS di taglia almeno K, allora H ha un VC di taglia al più L)

Supponiamo che $\langle G, K \rangle$ sia un'istanza "sì" di Independent Set. Questo significa che esiste un Independent Set S in G tale che $|S| \geq K$. Consideriamo il complemento di S rispetto a V, ovvero $C = V \setminus S$. Per il Lemma di Dualità IS-VC, C è un Vertex Cover di G. Poiché $H = G$, C è anche un Vertex Cover di H. Calcoliamo la taglia di C: $|C| = |V| - |S|$. Dato che $|S| \geq K$, ne segue che $-|S| \leq -K$. Quindi, $|C| = |V| - |S| \leq |V| - K$. Per costruzione, $L = |V| - K$. Dunque, $|C| \leq L$. Questo significa che H ha un Vertex Cover C di taglia al più L, quindi $\langle H, L \rangle$ è un'istanza "sì" di Vertex Cover.

3.2.2 $\Longleftarrow$ (Se H ha un VC di taglia al più L, allora G ha un IS di taglia almeno K)

Supponiamo che $\langle H, L \rangle$ sia un'istanza "sì" di Vertex Cover. Questo significa che esiste un Vertex Cover C in H tale che $|C| \leq L$. Consideriamo il complemento di C rispetto a V_H (i nodi di H), ovvero $S = V_H \setminus C$. Per il Lemma di Dualità IS-VC, S è un Independent Set di H. Poiché $G = H$, S è anche un Independent Set di G. Calcoliamo la taglia di S: $|S| = |V_H| - |C|$. Dato che $|C| \leq L$, ne segue che $-|C| \geq -L$. Quindi, $|S| = |V_H| - |C| \geq |V_H| - L$. Per costruzione, $L = |V| - K$, e $|V_H| = |V|$. Sostituendo: $|S| \geq |V| - (|V| - K) = |V| - |V| + K = K$. Questo significa che G ha un Independent Set S di taglia almeno K, quindi $\langle G, K \rangle$ è un'istanza "sì" di Independent Set.

Poiché la trasformazione è polinomiale e la dimostrazione di equivalenza è valida in entrambi i versi, abbiamo dimostrato che $IS \leq_p VC$. Dato che Independent Set è NP-Hard, anche Vertex Cover è NP-Hard. Con VC $\in$ NP (dimostrato sopra), concludiamo che Vertex Cover è NP-Completo.

4 Clique

Definizione 4.1 (Clique). Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, una Clique (o Cricca) $Q \subseteq V$ è un sottoinsieme dei suoi nodi tale per cui ogni coppia di nodi distinti in Q è collegata da un arco. In altre parole, Q forma un sottografo completo. Formalmente:

$$\forall u, v \in Q, u \neq v \implies (u, v) \in E$$

Ogni grafo ammette una Clique (es. il set vuoto o un singolo nodo). I problemi interessanti riguardano la ricerca di Clique "grandi".

Definizione 4.2 (Clique (Problema di Decisione)). Il problema di decisione Clique è definito come l'insieme delle coppie $\langle G, K \rangle$ tali che G è un grafo non orientato, K è un numero intero, ed esiste una Clique in G di taglia (cardinalità) almeno K.

4.1 Membership in NP

Proposizione 4.1. Il problema Clique appartiene alla classe NP.

Dimostrazione.

1. Guess: La MTND indovina un sottoinsieme Q' di nodi di V.
2. Check: La MTND verifica deterministicamente:
   - La cardinalità di Q' è almeno K: $|Q'| \geq K$.
   - Tutti i nodi in Q' sono interconnessi: Per ogni coppia di nodi distinti $u, v \in Q'$, verifica che $(u, v) \in E$.

Entrambi i passaggi sono polinomiali. Quindi, Clique $\in$ NP.

4.2 Dimostrazione NP-Hardness: $IS \leq_p Clique$

Per dimostrare che Clique è NP-Hard, effettuiamo una riduzione polinomiale da Independent Set a Clique. Questa riduzione si basa sul concetto di grafo complemento.

Definizione 4.3 (Grafo Complemento). Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, il suo grafo complemento $\bar{G} = (V, \bar{E})$ è un grafo con lo stesso insieme di nodi V, ma con l'insieme di archi $\bar{E}$ tale che $(u, v) \in \bar{E}$ se e solo se $(u, v) \notin E$ (per $u \neq v$). In altre parole, gli archi in $\bar{G}$ sono esattamente gli archi che non esistono in G.

Lemma 4.1 (Relazione IS-Clique nel grafo complemento). Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Un sottoinsieme $S \subseteq V$ è un Independent Set di G se e solo se S è una Clique in $\bar{G}$.

Dimostrazione. $\Longrightarrow$ Supponiamo che S sia un Independent Set di G. Dobbiamo dimostrare che S è una Clique in $\bar{G}$. Per definizione di Independent Set, per ogni coppia di nodi distinti $u, v \in S$, non esiste un arco (u, v) in E. Per definizione di grafo complemento, se $(u, v) \notin E$, allora $(u, v) \in \bar{E}$. Quindi, per ogni coppia di nodi distinti $u, v \in S$, esiste un arco (u, v) in $\bar{E}$. Questo significa che S è una Clique in $\bar{G}$.

$\Longleftarrow$ Supponiamo che S sia una Clique in $\bar{G}$. Dobbiamo dimostrare che S è un Independent Set di G. Per definizione di Clique, per ogni coppia di nodi distinti $u, v \in S$, esiste un arco (u, v) in $\bar{E}$. Per definizione di grafo complemento, se $(u, v) \in \bar{E}$, allora $(u, v) \notin E$. Quindi, per ogni coppia di nodi distinti $u, v \in S$, non esiste un arco (u, v) in E. Questo significa che S è un Independent Set in G.

Il lemma è dimostrato.

Teorema 4.1. $IS \leq_p Clique$. Di conseguenza, Clique è NP-Hard.

Dimostrazione. Sia $\langle G, K \rangle$ un'istanza di Independent Set. Vogliamo costruire una coppia $\langle H, L \rangle$ tale che G ha un Independent Set di taglia almeno K se e solo se H ha una Clique di taglia almeno L.

Costruzione della Trasformazione (f):

1. Grafo H: $H = \bar{G}$. H è il grafo complemento di G.
2. Valore L: $L = K$. Il valore K viene copiato.

La costruzione del grafo complemento può essere fatta in tempo polinomiale (iterando su tutte le possibili coppie di nodi e controllando l'esistenza di un arco in G). Quindi la trasformazione è polinomiale.

Correttezza della Riduzione:

4.2.1 $\implies$ (Se G ha un IS di taglia almeno K, allora H ha una Clique di taglia almeno L)

Supponiamo che $\langle G, K \rangle$ sia un'istanza "sì" di Independent Set. Questo significa che esiste un Independent Set S in G tale che $|S| \geq K$. Per il Lemma di Relazione IS-Clique nel grafo complemento, S è una Clique in $\bar{G}$. Poiché $H = \bar{G}$, S è una Clique in H. La taglia di S è $|S| \geq K$. Per costruzione, $L = K$. Quindi, H ha una Clique S di taglia almeno L, il che significa che $\langle H, L \rangle$ è un'istanza "sì" di Clique.

4.2.2 $\impliedby$ (Se H ha una Clique di taglia almeno L, allora G ha un IS di taglia almeno K)

Supponiamo che $\langle H, L \rangle$ sia un'istanza "sì" di Clique. Questo significa che esiste una Clique S in H tale che $|S| \geq L$. Per il Lemma di Relazione IS-Clique nel grafo complemento, S è un Independent Set in $\bar{H}$. Per costruzione, $H = \bar{G}$, quindi $\bar{H} = \overline{\bar{G}} = G$. Pertanto, S è un Independent Set di G. La taglia di S è $|S| \geq L$. Per costruzione, $L = K$. Quindi, G ha un Independent Set S di taglia almeno K, il che significa che $\langle G, K \rangle$ è un'istanza "sì" di Independent Set.

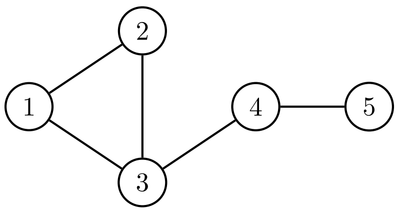
Poiché la trasformazione è polinomiale e la dimostrazione di equivalenza è valida in entrambi i versi, abbiamo dimostrato che $IS \leq_p Clique$. Dato che Independent Set è NP-Hard, anche Clique è NP-Hard. Con Clique $\in$ NP (dimostrato sopra), concludiamo che Clique è NP-Completo.

5 Dominating Set (DS)

Definizione 5.1 (Dominating Set). Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un Dominating Set (DS) $D \subseteq V$ è un sottoinsieme dei suoi nodi tale per cui ogni nodo $v \in V \setminus D$ è adiacente ad almeno un nodo in D. In altre parole, ogni nodo fuori da D è "dominato" da un nodo in D. Formalmente:

$$\forall v \in V \setminus D, \exists u \in D \text{ tale che } (u, v) \in E$$

Esempio 5.1. Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ed $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$.



Il sottoinsieme $D = \{3, 5\}$ è un Dominating Set.

- Nodo 1: è adiacente a 3 ($\in D$).
- Nodo 2: è adiacente a 3 ($\in D$).
- Nodo 4: è adiacente a 3 ($\in D$) e 5 ($\in D$).

Tutti i nodi fuori da D sono dominati.

Relazione tra Vertex Cover e Dominating Set: Un Vertex Cover è sempre un Dominating Set. Questo perché se ogni arco (u, v) ha almeno un endpoint in C (VC), allora ogni nodo $x \notin C$ deve per forza avere tutti i suoi vicini in C (altrimenti l'arco che lo collega a un vicino fuori da C non sarebbe coperto). Di conseguenza, ogni nodo $x \notin C$ è dominato da almeno un nodo in C. Tuttavia, il viceversa non è vero. Nell'esempio precedente, $D = \{3,5\}$ è un Dominating Set di taglia 2. Ma non è un Vertex Cover, perché l'arco $(1,2)$ non è coperto (né 1 né 2 sono in D). Quindi, un Vertex Cover è un caso più "stringente" rispetto a un Dominating Set.

Definizione 5.2 (Dominating Set (Problema di Decisione)). Il problema di decisione Dominating Set è definito come l'insieme delle coppie $\langle G, K\rangle$ tali che G è un grafo non orientato, K è un numero intero, ed esiste un Dominating Set in G di taglia (cardinalità) al più K.

5.1 Membership in NP

Proposizione 5.1. Il problema Dominating Set appartiene alla classe NP.

Dimostrazione.

1. Guess: La MTND indovina un sottoinsieme D' di nodi di V.
2. Check: La MTND verifica deterministicamente:
   - La cardinalità di D' è al più K: $|D'| \leq K$.
   - Ogni nodo non in D' è dominato: Per ogni nodo $v \in V \setminus D'$, verifica che esista un nodo $u \in D'$ tale che $(u,v) \in E$.

Entrambi i passaggi sono polinomiali. Quindi, Dominating Set $\in$ NP.

5.2 Dimostrazione NP-Hardness: $VC \leq_p DS$

Per dimostrare che Dominating Set è NP-Hard, effettuiamo una riduzione polinomiale da Vertex Cover a Dominating Set.

Teorema 5.1. $VC \leq_p DS$. Di conseguenza, Dominating Set è NP-Hard.

Dimostrazione. Sia $\langle G = (V,E), K\rangle$ un'istanza di Vertex Cover. Vogliamo costruire una coppia $\langle H = (V_H, E_H), L\rangle$ tale che G ha un Vertex Cover di taglia al più K se e solo se H ha un Dominating Set di taglia al più L.

Costruzione della Trasformazione (f): Il grafo H viene costruito a partire da G come segue:

1. Nodi (V_H): V_H contiene tutti i nodi di V (i nodi originali). Per ogni arco $(u,v) \in E$ di G, aggiungiamo un nuovo nodo "ausiliario" e_{uv} a V_H.
2. Archi (E_H):
   - Tutti gli archi originali di G sono inclusi in E_H.
   - Per ogni nodo ausiliario e_{uv} (corrispondente all'arco (u,v) in G), aggiungiamo archi che lo collegano ai suoi due endpoint originali: (e_{uv}, u) e (e_{uv}, v). Non aggiungiamo archi tra i nodi ausiliari.
3. Valore L: $L = K$. Il valore K viene copiato.

Questa costruzione è polinomiale. Se G ha N nodi e M archi, H avrà $N + M$ nodi e $M + 2M = 3M$ archi.

Esempio di Trasformazione: Sia G il grafo con $V = \{1,2,3,4\}$ ed $E = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,4)\}$.

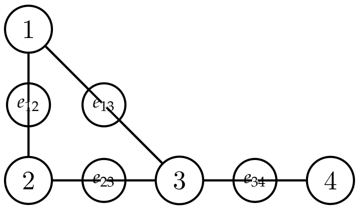


Figura 2: Grafo H costruito da G

Correttezza della Riduzione:

5.2.1 $\Longrightarrow$ (Se G ha un VC di taglia al più K, allora H ha un DS di taglia al più L)

Supponiamo che $\langle G, K \rangle$ sia un'istanza "sì" di Vertex Cover. Questo significa che esiste un Vertex Cover C in G tale che $|C| \leq K$. Sosteniamo che $D = C$ (usando gli stessi nodi) è un Dominating Set di H. La taglia di D è $|D| = |C| \leq K = L$. Dobbiamo solo dimostrare che D domina tutti i nodi in $H \setminus D$. I nodi in H sono di due tipi: nodi originali (V) e nodi ausiliari (E_{uv}).

- Nodi originali non in D ($v \in V \setminus D$): Poiché C è un Vertex Cover di G, ogni arco $(v, u) \in E$ incidente a v deve avere il suo altro endpoint $u \in C$ (dato che $v \notin C$). Quindi v è adiacente a $u \in C$. Poiché $C \subseteq D$, v è dominato da $u \in D$.

- Nodi ausiliari (e_{uv}): Per definizione di Vertex Cover, l'arco (u, v) in G è coperto da C. Questo significa che $u \in C$ oppure $v \in C$. Poiché e_{uv} è collegato sia a u che a v in H, se $u \in C$ allora e_{uv} è dominato da $u \in D$. Se $v \in C$ allora e_{uv} è dominato da $v \in D$. In ogni caso, e_{uv} è dominato da un nodo in D.

Quindi, $D = C$ è un Dominating Set di H di taglia al più L. Perciò, $\langle H, L \rangle$ è un'istanza "sì" di Dominating Set.

5.2.2 $\Longleftarrow$ (Se H ha un DS di taglia al più L, allora G ha un VC di taglia al più K)

Supponiamo che $\langle H, L \rangle$ sia un'istanza "sì" di Dominating Set. Questo significa che esiste un Dominating Set D in H tale che $|D| \leq L$. Costruiamo un insieme C' di nodi originali a partire da D. L'idea è convertire i nodi ausiliari in D in nodi originali, se necessario. Sia $C' \subseteq V$ l'insieme dei nodi originali in V che sono in D. Se un nodo ausiliario e_{uv} è in D, allora aggiungiamo u (o v, uno qualsiasi dei due) a C'. In altre parole:

$$C' = (D \cap V) \cup \{u \mid e_{uv} \in D \text{ per qualche } v \in V \text{ e } u \text{ è un endpoint di } (u, v)\}$$

La taglia di C' sarà al più $|D|$ (poiché ogni e_{uv} in D è sostituito da un solo nodo originale in C'), e quindi $|C'| \leq |D| \leq L = K$.
Ora, dobbiamo dimostrare che C' è un Vertex Cover di G. Assumiamo per contraddizione che C' non sia un Vertex Cover di G. Ciò significa che esiste almeno un arco $(x, y) \in E$ in G tale che né x né y sono in C'. Consideriamo il nodo ausiliario e_{xy} in H che corrisponde all'arco (x, y) in G. Per ipotesi, D è un Dominating Set di H. Quindi, e_{xy} deve essere dominato da un nodo in D. Un nodo in D che domina e_{xy} può essere:

1. e_{xy} stesso: Se $e_{xy} \in D$, allora per costruzione di C', uno dei suoi endpoint (x o y) sarebbe stato aggiunto a C'. Ma abbiamo assunto che né x né y sono in C'. Questo è una contraddizione.

2. Un nodo originale $v \in V \cap D$ adiacente a e_{xy}: Gli unici nodi originali adiacenti a e_{xy} sono x e y. Se $x \in D$ o $y \in D$, allora per costruzione di C', $x \in C'$ o $y \in C'$. Questo contraddice la nostra assunzione che né x né y sono in C'.

Entrambi i casi portano a una contraddizione. Pertanto, l'assunzione che C' non sia un Vertex Cover è falsa. Quindi, C' è un Vertex Cover di G di taglia al più K. Ciò significa che $\langle G, K \rangle$ è un'istanza "sì" di Vertex Cover.
Poiché la trasformazione è polinomiale e la dimostrazione di equivalenza è valida in entrambi i versi, abbiamo dimostrato che $VC \leq_p DS$. Dato che Vertex Cover è NP-Hard, anche Dominating Set è NP-Hard. Con DS $\in$ NP (dimostrato sopra), concludiamo che Dominating Set è NP-Completo.

6 Conclusioni

Oggi abbiamo esaminato diversi problemi NP-Completi sui grafi, dimostrando la loro NP-Completezza tramite riduzioni polinomiali. Abbiamo visto come i problemi NP-Completi siano tutti interconnessi attraverso queste riduzioni, formando una "catena" di complessità. È fondamentale comprendere il metodo delle riduzioni, la costruzione di un'istanza e la dimostrazione della sua correttezza in entrambi i versi. Per padroneggiare questi concetti, è altamente consigliabile rivedere le dimostrazioni e provare a ricrearle autonomamente.